

## DIAGRAMMES et ABAQUES

Parmi les outils de calcul mis au point pour déterminer les éléments d'une droite de hauteur figurent les abaques et diagrammes. D'une manière générale leur conception résulte d'une projection de la sphère sur un plan (projection stéréographique et carte plate notamment) ou d'une « *représentation graphique cotée des lois mathématiques définies par des équations*<sup>1</sup> » permettant la résolution de ces équations ou encore d'une combinaison des deux procédés.

Certains diagrammes ont été analysés dans les fiches relatives à l'étude des tables auxquels ils sont associés :

- diagramme d'azimut de A. Rust (1908), associé au « Line of Position Book » de P. V. H. Weems ;
- quadrant planisphérique de Ch. Bertin (1913), associé à ses « Tablettes » ;
- graphique d'azimut de Ch. Cornet (1926), associé à ses « Tables Nautiques » ;
- abaque d'azimut de P. Hugon (1947), associé à ses « Nouvelles Tables ».

La présente fiche est consacrée à l'analyse de quelques autres outils de calcul graphique conçus pour déterminer tout ou partie des éléments de tracé d'une droite de hauteur. Seront analysés successivement dans cette fiche :

- le diagramme d'azimut de Weir ;
- le diagramme d'Ocagne ;
- l'abaque de Favé et Rollet de l'Isle ;
- les tables graphiques de Constan.

L'étude est ainsi limitée aux réalisations les plus connues, notamment en France. Il existe cependant de nombreux autres diagrammes, comme ceux donnant directement latitude et longitude suite à l'observation de plusieurs astres comme le « Beij Two-star Diagram » ou les « Star Altitude Curves » de P. V. H. Weems. Ce dernier fera l'objet d'une fiche spécifique<sup>2</sup>.

Un inventaire, exhaustif et détaillé, des différents procédés de calcul graphique et mécanique, appliqué aux problèmes de navigation figure dans le Bowditch (1977) à partir de la page 600.

---

<sup>1</sup> D'après M. d'Ocagne, en introduction de son traité de nomographie (1899).

<sup>2</sup> Voir également le diagramme de hauteur de P. Hugon, qui constitue un exemple de construction mathématique de diagramme ; ce diagramme, théorique, en est resté au stade expérimental. Voir revue de l'IFN de janvier 1954.

## DIAGRAMME D'AZIMUT DE WEIR

### ***Introduction :***

Patrick Weir, Capitaine au Long-Cours, accordait, à juste raison, une importance fondamentale à la connaissance précise de la variation du compas et à son contrôle régulier. La seule méthode applicable au large étant la comparaison, à un instant donné, entre le relèvement compas d'un astre et son relèvement vrai, il s'est attaché à concevoir un diagramme permettant de trouver rapidement et précisément l'azimut cherché. Le fruit de ses recherches, le « Weir Azimuth Diagram », fut publié pour la première fois à Londres en 1890 puis aux Etats-Unis, par le US Hydrographic Office, en 1891, sous le titre de « Time Azimuth Diagram ». Le document connut un certain succès, notamment auprès des officiers de la Royal Navy, dont le manuel de référence en matière de navigation<sup>3</sup> en expliquait le principe et en donnait le mode d'emploi.

Le diagramme de Weir est toujours publié, en 2013, par le UK Hydrographic Office dans une version actualisée en 1940 sous le titre de « Modified Weir Azimuth Diagram » ; le document porte le numéro 5000 de la nomenclature, l'édition consultée étant datée de 1950.

Nous ne connaissons pas le détail des modifications qui ont été apportées ; cependant, l'analyse du texte d'une conférence prononcée par P. Weir en 1893<sup>4</sup>, relative à la construction et à l'usage du diagramme dont il est l'auteur, porte à croire que les modifications ont été mineures. Nous avons utilisé ce texte comme document de base pour expliciter le principe de construction du diagramme.

Le document disponible figure sur une feuille unique de papier fort (carte marine) de dimensions 64 cm sur 55 cm<sup>5</sup>.

### ***Principe de construction du diagramme :***

Le point de départ de la recherche de P. Weir est la projection orthogonale de la sphère locale dans le plan de l'horizon. Dans cette projection, pour une latitude donnée, l'équateur et les parallèles diurnes des astres sont représentés par des ellipses non concentriques et non superposables ; les cercles horaires sont de même représentés par une famille d'ellipses. Ce canevas, sur lequel on peut placer l'image de l'astre et en mesurer l'azimut, est particulier à la latitude pour lequel il est établi. Un travail équivalent sera à reproduire pour un certain nombre de valeurs discrètes de la latitude afin de disposer d'un document utilisable dans toutes les zones de navigation usuelles. L'ensemble est donc long à mettre au point, encombrant et peu commode puisqu'il faudra en général interpoler entre deux latitudes. P. Weir cherchait essentiellement à résoudre le problème de l'azimut : il s'est donc affranchi des considérations relatives à la hauteur<sup>6</sup> de l'astre ce qui lui a permis d'utiliser des transformations géométriques simples conduisant à l'obtention d'un diagramme utilisable sous toutes les latitudes et

---

<sup>3</sup> «Admiralty Navigation Manual». Source : Ch. Cotter in «A History of Nautical Astronomy», page 324.

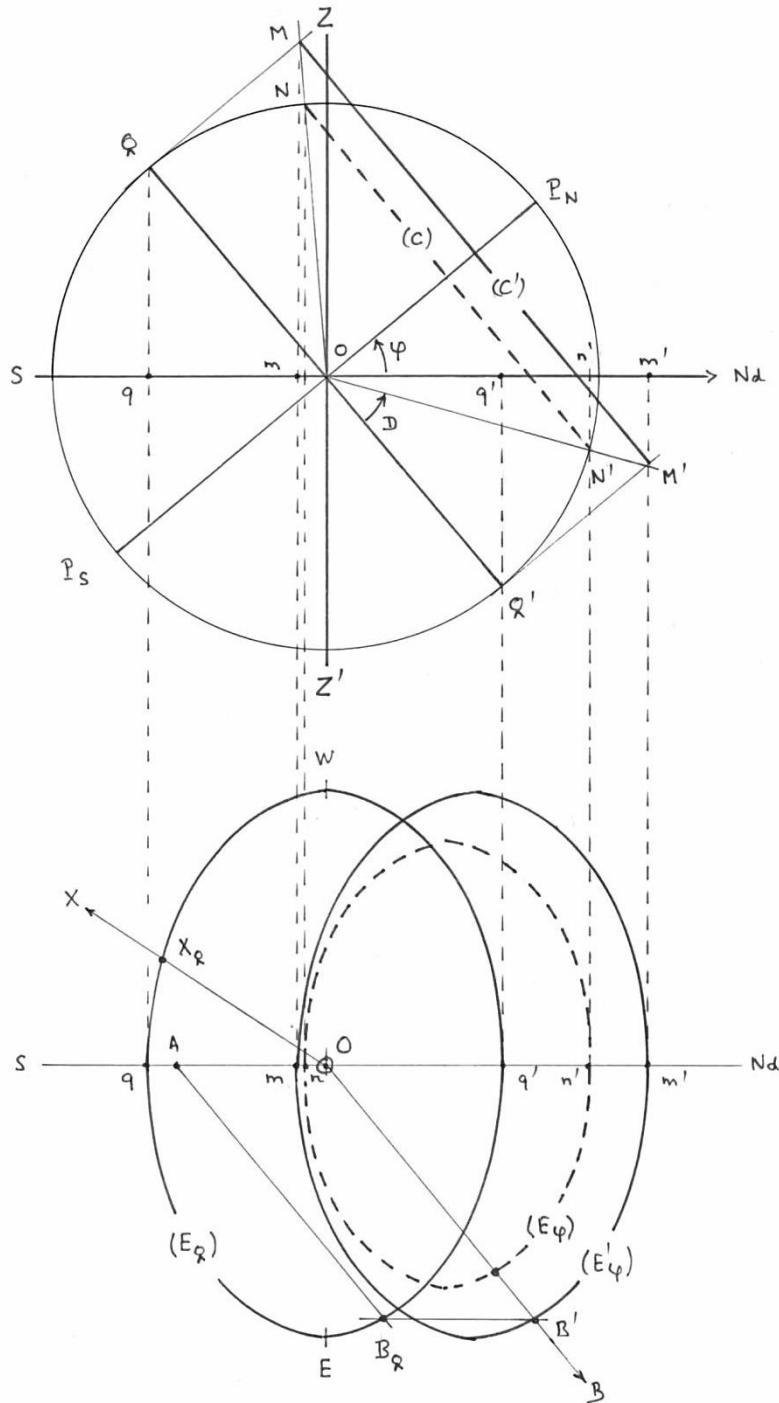
<sup>4</sup> « Paper read at the Adelaide meeting of the Australasian Association for the Advancement of Science, September 1893, explaining the construction of Weir's Azimuth Diagram ». National Library of Australia.

<sup>5</sup> Ces dimensions sont un peu inférieures à celles citées par Lecky : 30 sur 21 pouces (76 sur 53 cm environ).

<sup>6</sup> On peut cependant évaluer, indirectement, la hauteur de l'astre à l'aide du diagramme ; une procédure en est indiquée à la fin du texte de la conférence.

pour toutes les déclinaisons<sup>7</sup> figurant sur une feuille unique. La représentation finalement obtenue est alors un abaque de calcul et non plus une projection directe des éléments de la sphère locale.

Considérons un lieu de latitude  $\varphi$  quelconque et la sphère locale correspondante représentée ci-dessous en coupe selon le plan du méridien. On note sur la figure  $QQ'$  la trace de l'équateur et  $(C)$  la trace du parallèle diurne (en tireté) d'un astre de déclinaison  $D$ .



La projection, dans le plan de l'horizon, du grand cercle équateur est une ellipse ( $E_Q$ ), concentrique à la sphère locale (centre  $O$ ), dont le demi-grand axe est égal au rayon (unité) ; le demi-petit axe a pour

<sup>7</sup> Jusqu'à  $65^\circ$  avec une extension possible jusqu'à  $78^\circ$ .

longueur  $\sin\varphi$ . Grand axe et petit axe ( $qq'$ ) sont respectivement portés par les axes EW et NdS de la sphère locale. Si on sait placer la projection  $X_Q$  d'un astre X de déclinaison nulle (l'équateur en est le parallèle diurne) sur l'ellipse correspondante, il sera facile d'en mesurer l'azimut  $Z_X$  avec un rapporteur sur la feuille de papier matérialisant le plan de projection (plan de l'horizon).

La projection du parallèle diurne (C) dans le plan de l'horizon est une ellipse notée ( $E_\varphi$ ). On remarque que cette ellipse (en tireté) n'est pas superposable à l'ellipse précédente ( $E_Q$ ).

P. Weir imagine donc d'abord un « parallèle diurne » ( $C'$ ) qui aurait même rayon que l'équateur sans que l'azimut et l'angle au pôle ne soit altérés : il suffit pour cela d'augmenter le rayon, arbitraire, de la sphère locale. Un diamètre est  $MM'$  et la projection de ( $C'$ ) dans le plan de l'horizon est une ellipse ( $E'_\varphi$ ), de petit axe  $mm'$  égal à  $qq'$ , superposable à ( $E_Q$ ). Si on sait placer la projection  $B'$  d'un astre sur cette ellipse, son azimut  $Z_B$  sera obtenu en lisant au rapporteur l'angle  $\widehat{NdOB}$ .

Le dispositif impose, pour plusieurs valeurs de latitude (tous les  $10^\circ$  par exemple) un jeu d'ellipses construites pour une série de valeur de déclinaison.

Compte tenu du fait que la distance entre ellipses superposables est égale à  $qm$  soit  $\tan D \cdot \cos\varphi$ , Weir effectue la translation qui conduit à la superposition de ( $E'_\varphi$ ) avec ( $E_Q$ ). La position correspondante de l'astre vient en  $B_Q$ . Pour effectuer la mesure de l'azimut, il faut déplacer le centre de mesure de l'angle de O en A tel que  $OA = \tan D \cdot \cos\varphi$ . Ayant placé A et  $B_Q$ , l'azimut pourra se mesurer au rapporteur en lisant la valeur de l'angle  $\widehat{NdAB_Q}$ .

La translation du centre de mesure de O en A est fonction de la déclinaison D et de la latitude  $\varphi$ . Ceci conduit à utiliser des échelles de mesure de cette translation calculées selon les deux paramètres.

Pour pallier à cet inconvénient, P. Weir imagine alors de donner au rayon de la sphère locale d'un lieu de latitude  $\varphi$  la valeur  $\sec\varphi$ . Dans ces conditions, la distance  $qm$  entre les ellipses ( $E_Q$ ) et ( $E'_\varphi$ ) est égale à  $\tan D \cdot \cos\varphi \cdot \sec\varphi = \tan D$  : la translation de O vers A (comme de  $B'$  vers  $B_Q$ ) est maintenant indépendante de la latitude et il sera aisé de graduer l'axe NdS directement en valeurs de déclinaison.

On obtient donc en définitive une famille d'ellipses, pour chaque valeur de latitude, dont le demi-grand axe est  $\sec\varphi$  et le demi-petit axe  $\tan\varphi$  ; l'équation d'une ellipse rapportée aux axes est de la forme :

$$\frac{x^2}{(\sec \varphi)^2} + \frac{y^2}{(\tan \varphi)^2} = 1$$

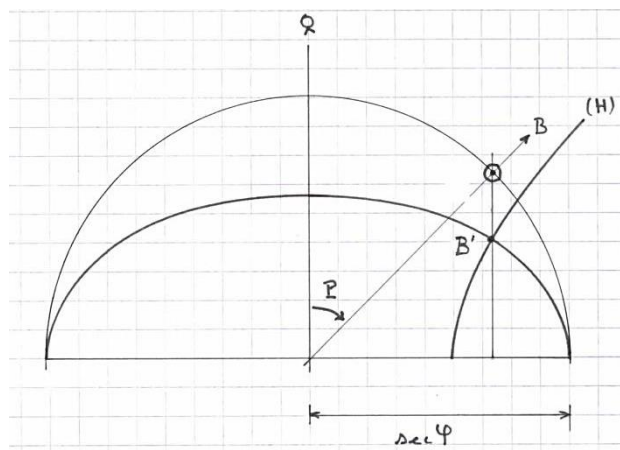
On vérifie que ces ellipses sont homofocales. On effectue ensuite le tracé des ellipses représentatives de diverses valeurs de latitude (de  $10^\circ$  en  $10^\circ$  par exemple).

Pour effectuer la mesure d'azimut, il faut maintenant pouvoir placer le point représentatif de l'astre sur son ellipse.

La position d'un astre B peut être repérée sur son parallèle diurne (agrandi ou non<sup>8</sup>) par sa distance angulaire au méridien supérieur, l'angle au pôle P. On peut ensuite calculer les coordonnées de sa projection  $B'$  (puis  $B_Q$ ) sur l'ellipse considérée, construite pour la latitude  $\varphi$  de l'observateur et dont l'équation figure ci-dessus.

---

<sup>8</sup> C'est-à-dire (C) comme ( $C'$ ).



L'abscisse x de B' étant égale à  $\sin P \cdot \sec \varphi$ , on peut calculer son ordonnée y :

$$y^2 = (\tan \varphi \cdot \cos P)^2$$

Et on établit ensuite que x et y vérifient :

$$\frac{x^2}{(\sin P)^2} - \frac{y^2}{(\cos P)^2} = 1$$

Ce qui constitue l'équation d'une famille d'hyperboles homofocales qu'il conviendra de tracer, dans le même plan et selon le même repère que les ellipses, pour diverses valeurs d'angle au pôle (tous les 10° par exemple), et de repérer.

On obtient ainsi un canevas d'ellipses caractéristiques de la latitude et d'hyperboles caractéristiques de l'angle au pôle (en fait, le diagramme de Weir utilise directement l'angle horaire local AHag).

Ce canevas étant construit il sera facile de placer l'image représentative  $B_Q$  d'un astre connaissant son angle horaire local et la latitude du lieu. La déclinaison de l'astre étant donnée, on placera ensuite le centre de mesure A de l'azimut puis une simple mesure au rapporteur de la direction  $AB_Q$  donnera accès à l'azimut de l'astre.

**Nota :** La fiche relative à l'analyse des « Tables Nautiques » de Charles Cornet (1926) présente un diagramme d'azimut - dit graphique de Cornet -. Ce graphique est un quartier du diagramme de Weir ; le canevas en avait été établi facilement de façon analytique, en partant de la formule de l'azimut par l'heure. On aurait pu utiliser la même méthode pour expliciter la construction du diagramme de Weir. On a cependant tenu à suivre la démarche exposée par son auteur.

### **Réalisation et usage :**

Le « Modified Weir Azimuth Diagram » publié par le UK Hydrographic Office est utilisable en tous lieux de latitude n'excédant pas 65° et pour des astres dont la déclinaison est comprise entre 0° et 78°<sup>9</sup>.

Les grandes dimensions du diagramme (64 sur 55 cm) autorisent la construction du réseau d'ellipses pour chaque degré entier de latitude (en bleu) et du réseau d'hyperboles pour chaque degré entier d'angle horaire local (en rouge).

<sup>9</sup> Lorsque la déclinaison est supérieure à 65°, il faut allonger l'axe vertical du diagramme et utiliser une échelle annexe.

Le point cardinal N est porté suivant la direction ascendante de l'axe vertical du diagramme ; les azimuts sont comptés de la façon usuelle, de  $0^\circ$  à  $360^\circ$  dans le sens rétrograde ; ils sont repérés en noir sur une couronne extérieure pour satisfaire à l'usage d'une règle parallèle.

L'angle horaire local est repéré :

- à partir du haut du diagramme, en tête de chaque demi-branche d'hyperbole, de  $0^\circ$  à  $360^\circ$  (et 0 à 24 h) en tournant dans le sens rétrograde, pour les latitudes N (inscriptions en noir),
- à partir du bas du diagramme, en tête de chaque demi-branche d'hyperbole, de  $0^\circ$  à  $360^\circ$  (et 0 à 24 h), en tournant dans le sens direct, pour les latitudes S (inscriptions en vert).

Une rapide analyse sur une sphère locale montre que les graduations d'azimut sont décalées de  $180^\circ$  par rapport aux graduations d'angle horaire, quelle que soit le nom de la latitude. Ce décalage a été voulu par la contrainte de sens logique de translation du centre A de mesure de l'azimut qui doit se faire « vers le haut » si la déclinaison est N et « vers le bas » si la déclinaison est S.

En effet, si on reprend l'explication de la construction du diagramme donnée ci-dessus, la translation de O vers A se fait vers la gauche (donc vers le bas si on adopte la représentation « Nord en haut ») alors que la déclinaison choisie pour l'exemple est N. Le décalage de  $180^\circ$  entre azimut et angle horaire implique une translation dans un sens habituel et conventionnel.

Le placement de la représentation de l'astre se fait en suivant la branche d'hyperbole relative à l'angle horaire considéré et à l'hémisphère dans lequel on se trouve ; on part donc toujours de la périphérie du diagramme. On suit la branche d'hyperbole jusqu'à sa première intersection avec l'ellipse caractéristique de la latitude. On marque ainsi le point  $B_Q$ .

Sur l'axe vertical, on place le point A selon la déclinaison de l'astre. On note que 27 étoiles principales sont directement indiquées à l'emplacement correspondant à leur déclinaison.

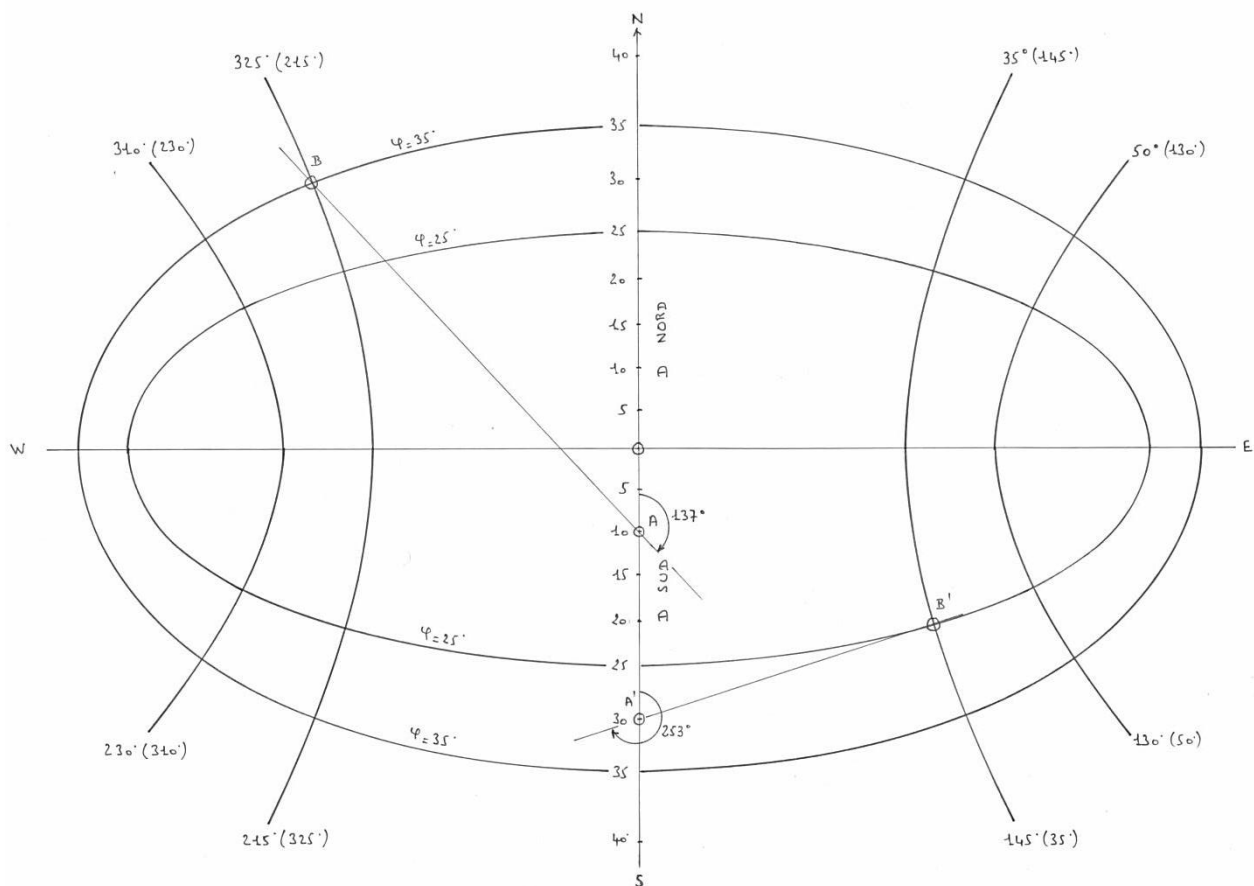
Afin de tenir compte du décalage de  $180^\circ$  indiqué ci-dessus, la lecture de l'azimut se fait avec une règle rapporteur (ou une règle parallèle) en relevant la direction de  $B_Q$  vers A (de l'image de l'astre vers le centre).

L'ensemble du diagramme est reproduit en annexe I.

La figure construite en page suivante représente un diagramme de Weir simplifié pour lequel on a construit les ellipses relatives aux latitudes  $25^\circ$  et  $35^\circ$  et les branches d'hyperboles relatives aux angles horaires locaux  $35^\circ$  et  $50^\circ$ ,  $130^\circ$  et  $145^\circ$ ,  $215^\circ$  et  $230^\circ$ ,  $310^\circ$  et  $325^\circ$  (les valeurs entre parenthèses sont relatives aux lieux de latitude S). On y a ensuite traité deux exemples :

- 1)  $AHag = 325^\circ$ ,  $\varphi = 35^\circ$  N et  $D = 10^\circ$  S. Azimut lu :  $Z = 137^\circ$ .
- 2)  $AHag = 035^\circ$ ,  $\varphi = 25^\circ$  S et  $D = 30^\circ$  S. Azimut lu :  $Z = 253^\circ$ .

Les valeurs obtenues par le calcul sont respectivement :  $137,0^\circ$  et  $252,8^\circ$ .



### Commentaires :

Le diagramme de Weir, de grandes dimensions est clair, un astre y est placé facilement, et simple d'utilisation. Des instructions d'emploi concises figurent aux coins du diagramme ainsi qu'un exemple. L'azimut est obtenu sans ambiguïté de quadrant avec la précision requise du degré.

Si le document peut, en permanence, rester disposé à plat et n'est utilisé que par des observateurs particulièrement précautionneux, son emploi ne présente que des avantages.

Les inconvénients, relevés par S. T. Lecky (voir Annexe II), étaient bien réels au début du XXe siècle à bord de navires où, bien souvent, la place était comptée<sup>10</sup> :

- érosion rapide du document suite aux gommages successifs notamment dans le cas d'utilisation partagée,
- encombrement et nécessité du rangement à plat<sup>11</sup>.

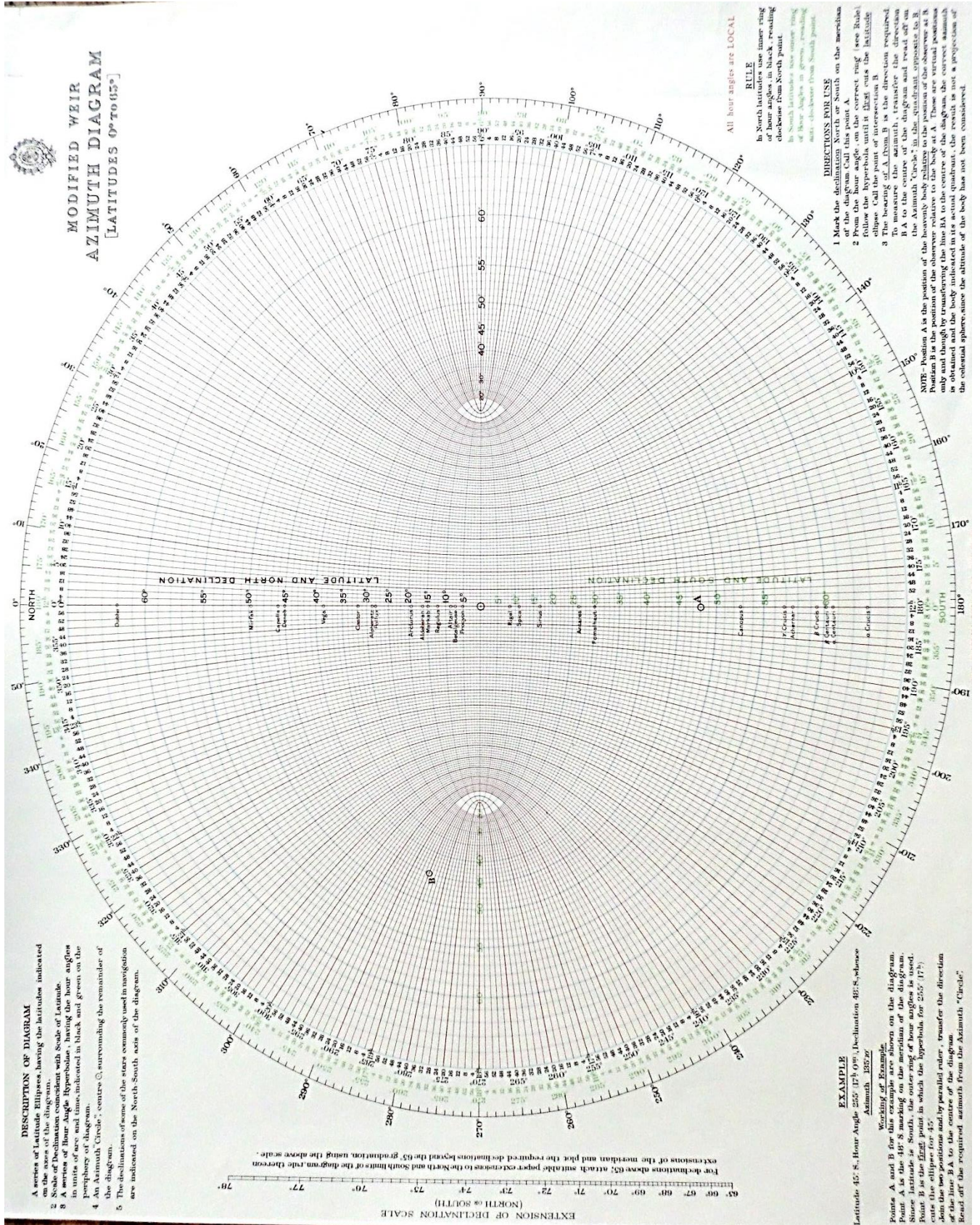
À bord des navires de commerce, ces arguments ne sont plus du tout pertinents à partir de la seconde moitié du XXe siècle : les chambres des cartes sont en général de dimensions respectables et un espace peut être prévu pour placer le diagramme à poste fixe sous un plexiglass de faible épaisseur.

<sup>10</sup> On pense notamment aux voiliers long-courriers de l'époque.

<sup>11</sup> Dans l'introduction des « General Utility Tables » Lecky indique que les tiroirs de la table à cartes étaient parfois fermés à clef par le capitaine donc inaccessibles aux officiers de quart ; seule la carte de la zone de navigation parcourue était à disposition.

# ANNEXE I

## DIAGRAMME DE WEIR





## ANNEXE II

### CAPTAIN WEIR'S AZIMUTH DIAGRAM

by S.T. Lecky in "Wrinkles in Practical Navigation"

Lord Kelvin, looking at it from a mathematician's point of view, considers it about the neatest thing of its kind ever produced, and wonders that it had not suggested itself before – apparently a repetition of Columbus and the egg.

The process of taking out the azimuth – the latitude, declination, and the hour-angle being given – is simple and quickly done. With ordinary care, the small error inseparable from the use of diagrams will not in most cases exceed half a degree, and this is not worth consideration; but there are cases involving the centre of the diagram where the lines run into confusion, in which the error might be possibly amount to a degree or a little more. These cases being confined to low latitudes and large hour-angles would not occur every day, and on certain routes would never occur at all, so that exception to the diagram cannot justly be taken on this score.

The writer, however, is not in love with mathematical diagrams of any sort, and least of all with one for this particular purpose. Azimuths in well-conducted vessels are taken frequently, and where the same diagram is worked upon with pencil and ruler day after day by several officers, it soon gets played out. Officer's cabin are small; their table, even supposing they have one, is smaller; and diagrams which require a good large table upon which to spread them out flat and leave space at the margin for parallel rulers, do not find favour with the average merchant officer, who seldom has room enough for himself and kit, especially when two are billeted in a cabin measuring at most 6 feet by 5. Whatever the cause, experience proves that, where it does not involve more time, the preference is given to calculation. Weir's diagram is 30 by 31 inches, and should be kept flat, not rolled.

*Extrait des "Wrinkles", 16e édition 1912, page 124.*

## DIAGRAMME D'OCAGNE

Philbert Maurice d'Ocagne (1862-1938) est Polytechnicien (promotion 1880) et Ingénieur des Ponts et Chaussées. C'est également un mathématicien de talent, promoteur, en France, des techniques – qu'il baptise nomographie – de résolution graphique d'équations par l'emploi d'abaques. Ses travaux dans ce domaine firent l'objet de nombreux mémoires et articles publiés dans des revues spécialisées ainsi que d'ouvrages de références dont un premier recueil, qu'il intitule « Nomographie »<sup>12</sup>, en 1891 suivi d'un « Traité de Nomographie » publié en 1899 chez Gauthier-Villars.

Dans ce traité figure la description et la théorie d'abaques relatifs à la résolution des triangles sphériques dont l'un permet notamment de résoudre un triangle dans lequel on connaît trois éléments consécutifs. Dans le domaine de la navigation, cet abaque est connu sous le nom de « diagramme d'Ocagne » et peut être utilisé, entre autre, pour déterminer la hauteur et l'azimut d'un astre connaissant la latitude de l'observateur, l'angle au pôle et la déclinaison de l'astre.

### ***Principe de construction du diagramme :***

Le triangle de position de l'astre est construit à partir du pôle élevé et on utilise les symboles usuels pour identifier les différents arcs et angles de ce triangle sphérique : latitude  $\varphi$ , déclinaison  $D$  (et distance polaire  $\delta$ ), hauteur  $H$  (et distance zénithale  $N$ ), angle au pôle  $P$  et azimut  $Z$ .

La latitude est toujours positive ; la déclinaison est positive si elle est de même nom que la latitude, négative dans le cas contraire.

La hauteur  $H$  peut être calculée par la formule fondamentale :

$$\sin H = \sin \varphi \cdot \sin D + \cos \varphi \cdot \cos D \cdot \cos P$$

Cette formule peut être transformée, en introduisant les quantités :

$$X = \left( \cos \frac{P}{2} \right)^2, \quad Y = \left( \sin \frac{P}{2} \right)^2 \text{ et rappelant que } X^2 + Y^2 = 1 \text{ et } X^2 - Y^2 = \cos P$$

On obtient, après factorisation et réduction :

$$\sin H = X \cdot \cos(\varphi - D) - Y \cdot \cos(\varphi + D)$$

On substitue ensuite la distance zénithale  $N$  à la hauteur  $H$  ( $N = 90^\circ - H$ ) et on fait apparaître la fonction haversine dont on rappelle la définition :

$$\text{hav}(\alpha) = \frac{1 - \cos \alpha}{2} = \left( \sin \frac{\alpha}{2} \right)^2$$

On obtient après identification et regroupement :

---

<sup>12</sup> C'est à ce recueil que font probablement référence les ingénieurs hydrographe Favé et Rollet de l'Isle dans le mémoire relatif à l'abaque qu'ils ont mis au point (Annales Hydrographiques 1892 et Revue Maritime et Coloniale 1893).

$$2. \text{hav}(N) = 2. \text{hav}(\varphi - D) + \text{hav}(P). [\cos(\varphi - D) + \cos(\varphi + D)]$$

Soit finalement, en exprimant les éléments du second membre uniquement avec la fonction haversine<sup>13</sup> :

$$\text{hav}(N) = \text{hav}(\varphi - D) + \text{hav}(P). [\text{hav}(180^\circ - (\varphi + D)) - \text{hav}(\varphi - D)]$$

Considérons maintenant le plan rapporté à un repère orthonormé d'axes Ox et Oy dans lequel les coordonnées d'un point sont :

$$x = \text{hav}(P) \text{ et } y = \text{hav}(N)$$

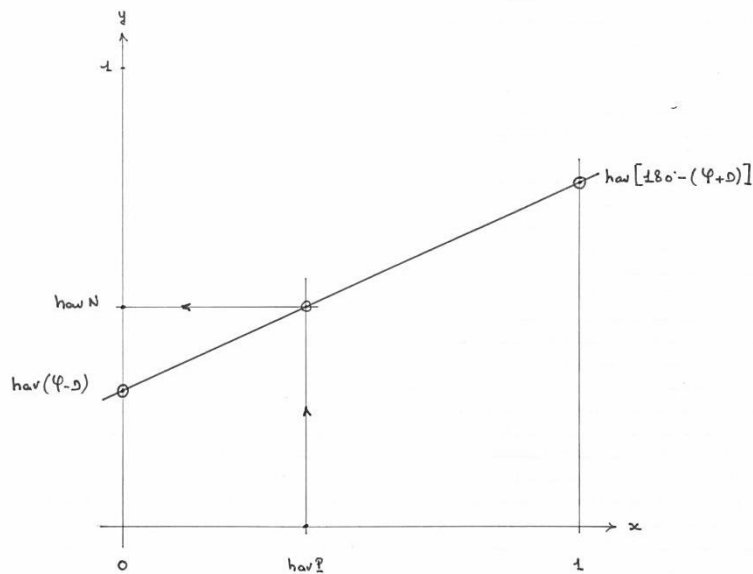
en posant :

$$m = \frac{\text{hav}(180^\circ - (\varphi + D)) - \text{hav}(\varphi - D)}{1} \text{ et } p = \text{hav}(\varphi - D)$$

l'équation s'écrit :

$$y = m. x + p$$

Dans le repère défini, c'est l'équation d'une droite d'ordonnée à l'origine p et de coefficient directeur m.



Si les axes sont directement gradués selon les valeurs angulaires considérées, la construction de la droite donne directement N, donc H, en fonction de P.

<sup>13</sup> On remarquera que P. Hugon a utilisé une formulation très voisine de celle choisie par M. d'Ocagne (voir fiche relative aux Nouvelles Tables de P. Hugon).

La hauteur H étant déterminée, l'azimut Z peut se calculer en utilisant la formule :

$$\sin D = \sin \varphi \cdot \sin H + \cos \varphi \cdot \cos H \cdot \cos Z$$

Cette expression devient, après avoir substitué la distance polaire  $\delta$  à la déclinaison ( $\delta = 90^\circ - D$ ), et par identification à la formule obtenue précédemment pour la hauteur :

$$\text{hav}(\delta) = \text{hav}(\varphi - H) + \text{hav}(Z) \cdot [\text{hav}(180^\circ - (\varphi + H)) - \text{hav}(\varphi - H)]$$

Le même abaque peut donc être utilisé pour déterminer l'azimut Z sachant qu'ici la droite sera tracée à partir des paramètres  $\varphi$  et H, la variable d'entrée étant  $\delta$ .

### **Construction du diagramme et exemple d'utilisation :**

La construction du diagramme est très simple et se résume ainsi :

- définition d'un système d'axes perpendiculaires,
- adoption d'une unité de longueur,
- graduation des axes de  $0^\circ$  à  $180^\circ$  selon la fonction haversine et tracé du carroyage correspondant.

Le diagramme figurant en page suivante est construit à l'origine sur une feuille de format A3 ; l'unité de longueur commode la plus grande qui peut être prise est de 250 mm. A partir de cette valeur on gradue les axes de  $0^\circ$  à  $180^\circ$  :

- N,  $\delta$ ,  $(\varphi - D)$  et  $(\varphi - H)$  en échelle verticale ascendante à gauche,
- P en échelle horizontale inférieure,
- Z en échelle horizontale supérieure,
- $(\varphi + D)$  et  $(\varphi + H)$  en échelle verticale descendante à droite.

Le calcul de position des graduations, tous les  $5^\circ$  donne les résultats suivants :

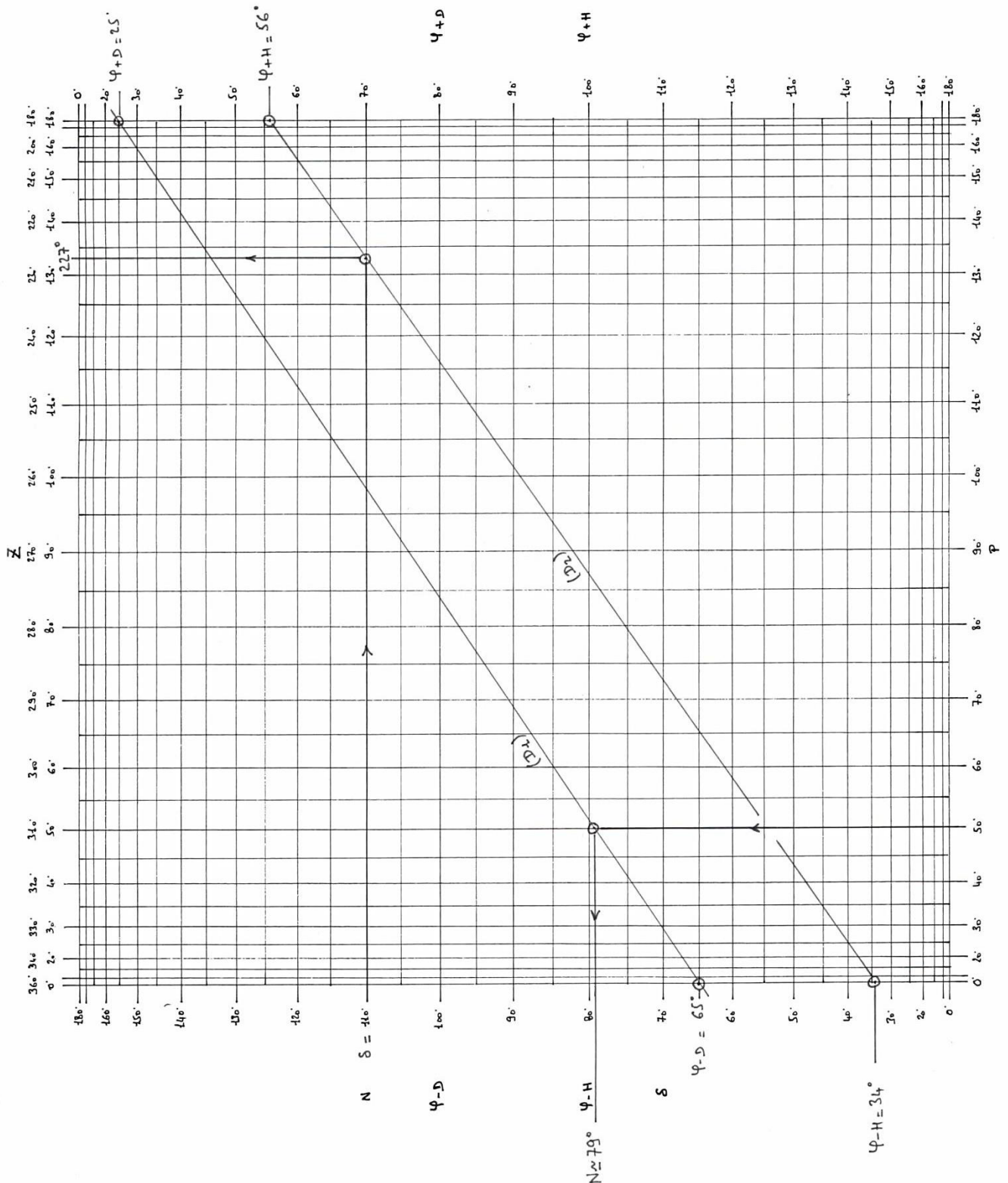
$\alpha$	hav( $\alpha$ )	x ou y (mm)	$\Delta x$ ou $\Delta y$ (mm/ $^\circ$ )	$\alpha$	hav( $\alpha$ )	x ou y (mm)	$\Delta x$ ou $\Delta y$ (mm/ $^\circ$ )
$0^\circ$	0	0	0	$50^\circ$	0,179	44,7	1,67
$5^\circ$	0,002	0,5	0,19	$55^\circ$	0,213	53,3	1,79
$10^\circ$	0,008	1,9	0,38	$60^\circ$	0,250	62,5	1,89
$15^\circ$	0,017	4,3	0,56	$65^\circ$	0,289	72,2	1,98
$20^\circ$	0,030	7,5	0,75	$70^\circ$	0,329	82,2	2,05
$25^\circ$	0,047	11,7	0,92	$75^\circ$	0,371	92,6	2,11
$30^\circ$	0,067	16,7	1,09	$80^\circ$	0,413	103,3	2,15
$35^\circ$	0,090	22,6	1,25	$85^\circ$	0,456	114,1	2,17
$40^\circ$	0,117	29,2	1,40	$90^\circ$	0,500	125,0	2,18
$45^\circ$	0,146	36,6	1,54				

$\Delta x$  et  $\Delta y$  représentent, pour la valeur considérée de la variable  $\alpha$ , l'écartement en mm entre deux graduations distantes de  $1^\circ$ . Il est évident qu'avec l'échelle adoptée un carroyage tous les degrés est irréalisable sauf, éventuellement, dans la partie centrale du diagramme.

L'expression de  $\Delta x$  (ou de  $\Delta y$ ) est obtenue par dérivation des expressions donnant  $x$  ou  $y$  en mm :

$$x = 250 \cdot \text{hav}(\alpha) ; \Delta x = 250 \cdot \frac{\sin \alpha}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \text{ car } \Delta \alpha = 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

Les graduations correspondant à l'intervalle  $[90^\circ, 180^\circ]$  sont obtenues sachant que  $\text{hav}(180^\circ - \alpha) = 1 - \text{hav}(\alpha)$ . Le diagramme obtenu est de format carré, le carroyage est ici tracé tous les  $5^\circ$ .



### Exemple :

Evaluation de la hauteur et de l'azimut d'un astre d'angle au pôle  $P = 50^\circ$  W, de déclinaison  $D = 20^\circ$  S, en un lieu de latitude  $\varphi = 45^\circ$  N.

On a tout d'abord :  $\varphi - D = 65^\circ$  et  $\varphi + D = 25^\circ$  ; on trace la droite ( $D_1$ ) correspondante sur le diagramme.

Avec  $P = 50^\circ$ , on obtient  $N \approx 79^\circ$ , soit  $H \approx 11^\circ$ .

On calcule ensuite  $\varphi - H = 34^\circ$  et  $\varphi + H = 56^\circ$  ; on trace la droite ( $D_2$ ) correspondante sur le diagramme.

Avec  $\delta = 90^\circ - D = 110^\circ$ , on obtient directement (astre à l'W)  $Z \approx 227^\circ$ .

Le calcul exact donne :  $H = 10^\circ 40,6'$  et  $Z = 227,1^\circ$ .

Remarque 1 : la fonction haversine étant paire ( $\text{hav}(-\alpha) = \text{hav}(\alpha)$ ), on entrera dans le diagramme avec les valeurs absolues des arcs considérés dans le cas où ils seraient négatifs.

Remarque 2 : la droite ( $D_1$ ) est caractéristique du mouvement diurne de l'astre ; ses passages aux méridiens supérieur et inférieur sont caractérisés par  $P = 0^\circ$  et  $P = 180^\circ$ , ses lever et coucher vrais par  $N = 90^\circ$  ; on pourra alors tracer la droite ( $D_2$ ) correspondante et déterminer les azimuts aux lever et coucher.

### **Commentaires :**

La construction du diagramme d'Ocagne est, nous l'avons constaté, particulièrement simple, de même que son utilisation, exempte de toute règle compliquée de signe ou de détermination. La contrepartie de cette simplicité est évidemment le manque de précision, tout au moins dans les zones correspondant à des arcs de mesure voisine de  $0^\circ$  ou de  $180^\circ$ . Pour obtenir une bonne précision, il faut agrandir le diagramme : un diagramme de 1 mètre de côté conduirait à un écart de  $1,5 \text{ mm}/^\circ$  à  $10^\circ$ , de  $6,1 \text{ mm}/^\circ$  à  $45^\circ$  et  $8,7 \text{ mm}/^\circ$  à  $90^\circ$ . On sait que l'on est limité dans le sens d'un agrandissement et le diagramme, qui n'est pas facilement fractionnable puisqu'il faut tracer la droite d'un côté à l'autre, restera donc toujours relativement imprécis : il ne pourra être utilisé pour un calcul de droite de hauteur. En revanche, la précision est compatible avec celle requise pour un calcul d'azimut, de même qu'avec celle nécessaire à l'identification d'un astre. Dans ce dernier cas, on utilise les formules établies ci-dessus en inversant les inconnues qui sont alors la déclinaison et l'angle au pôle.

Outre l'ouvrage de son auteur qui en explique la théorie générale, le diagramme d'Ocagne est présenté<sup>14</sup> dans le Bowditch (1977) qui mentionne notamment que des abaques construits sur le même principe ont été édités aux USA comme le « *Spherical Triangle Nomogram* » de Wimperis et le « *Altitude, Azimuth and Hour Angle Diagram* » de l'ingénieur hydrographe G. W. Littlehales, publié en 1917<sup>15</sup> par le US Navy Hydrographic Office.

*Nota : nous n'avons pu consulter un diagramme d'Ocagne original ; d'autre part, les dimensions réelles du diagramme original n'apparaissent pas dans la documentation consultée.*

<sup>14</sup> La théorie du diagramme d'Ocagne est également présentée dans « A History of Nautical Astronomy » de Ch. H. Cotter, page 336 et 337.

<sup>15</sup> Un article signé « X » paru dans « Monthly Weather Review » de juin 1905 décrit un diagramme conçu par G. W. Littlehales ; la conception de ce diagramme s'apparente plutôt à celle du quadrant planisphérique de Ch. Bertin (projection stéréographique d'une sphère de 12 pieds de diamètre découpée en sections formant un volume de 368 pages).

## ABAQUE de FAVÉ et ROLLET DE L'ISLE

### ***Introduction :***

Louis Favé (1853-1922) et Charles Rollet de l'Isle (1859-1943) sont ingénieurs hydrographes de la Marine ; ils se sont attachés à concevoir un outil de calcul fournissant rapidement les données nécessaires à la construction d'une droite de hauteur selon le procédé mis au point par Marcq de Saint-Hilaire. Leur démarche est motivée par la nécessité d'un contrôle précis, et surtout plus fréquent, de l'estime consécutif à l'augmentation de la vitesse des navires (paquebots et bâtiments de guerre) : l'officier de quart est ainsi conduit à consacrer un temps de plus en plus important aux calculs des observations ce qu'il convient d'essayer de réduire tout en limitant les risques d'erreur. Ils ont constaté le foisonnement des recherches dans le domaine des tables et l'intérêt qu'il y avait à tenter d'obtenir de nouvelles simplifications. Dans ce but, ils ont choisi de suivre une méthode graphique et ils en justifient le choix dans le chapitre introductif de leur mémoire « Abaque pour la détermination du point en mer » paru en 1892 dans les Annales Hydrographiques puis en janvier 1893 dans la Revue Maritime et Coloniale :

*« Les méthodes graphiques tendent de plus en plus à remplacer le calcul dans un très grand nombre d'applications. On leur reconnaît de grands avantages : la rapidité est plus grande, la fatigue moindre, les chances d'erreur diminuent. Ces avantages, reconnus lorsque le calculateur peut travailler en toute tranquillité d'esprit, ne sont-ils pas encore plus grands pour le marin obligé d'opérer dans des circonstances où son attention doit être toujours en éveil pour parer tout de suite à toutes les éventualités ? ».*

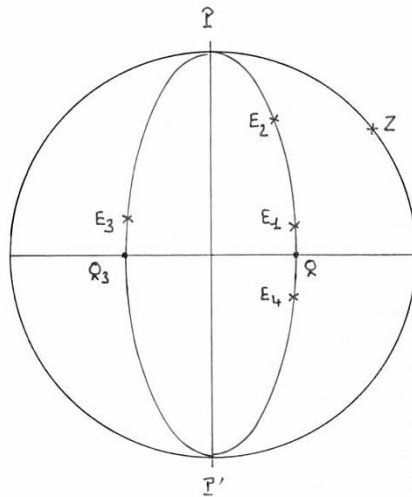
S'ils font référence à Maurice d'Ocagne, promoteur, en France, de la nomographie, concernant la théorie des abaques, l'outil de calcul conçu par Favé et Rollet de l'Isle est une réalisation originale dont la conception relève simultanément du calcul et de la géométrie.

### ***Principe de construction de l'abaque de Favé et Rollet de l'Isle :***

#### 1) Formulation employée :

Soit PZE le triangle de position de l'astre construit sur la sphère terrestre à partir du pôle élevé P. On considère la décomposition de ce triangle selon la hauteur sphérique issue de l'astre E, dont le pied est K. On note :

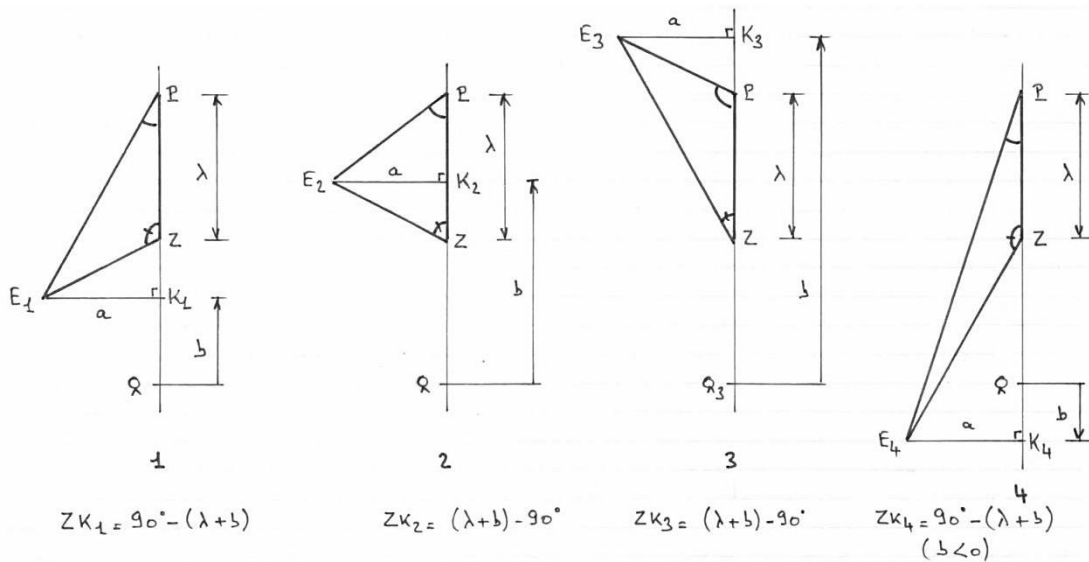
- $\varphi$ , la latitude et  $\lambda$  la colatitude ( $\lambda = 90^\circ - \varphi$ ) ;  $\varphi$  et  $\lambda$  sont positives et inférieures à  $90^\circ$  ;
- D, la déclinaison de l'astre, positive si elle est de même nom que la latitude, négative dans le cas contraire ;
- P, l'angle au pôle compté de  $0^\circ$  à  $180^\circ$  vers l'E ou vers l'W ;
- a, la hauteur sphérique EK ;
- b, la latitude du point K ;
- B, la somme algébrique  $\lambda + b$  ;
- H et Z, la hauteur de l'astre et son azimut compté ici de  $0^\circ$  à  $180^\circ$  vers l'E ou vers l'W.



Suivant la position de la projection de l'astre E par rapport au lieu Z, on distingue quatre configurations possibles du triangle :

- 1 –  $\varphi$  et D de même nom,  $P < 90^\circ$ ,  $E_1$  se projette en  $K_1$  à l'extérieur de l'arc PZ ;
- 2 –  $\varphi$  et D de même nom,  $P < 90^\circ$ ,  $E_2$  se projette en  $K_2$  à l'intérieur de l'arc PZ ;
- 3 –  $\varphi$  et D de même nom,  $P > 90^\circ$ ,  $E_3$  se projette en  $K_3$  à l'extérieur de l'arc PZ ;
- 4 –  $\varphi$  et D de noms contraires,  $P < 90^\circ$ ,  $E_4$  se projette en  $K_4$  à l'extérieur de l'arc PZ.

Ces quatre cas de figures sont schématisés ci-dessous :



Ils conduisent aux formules de calcul établies respectivement dans les triangles PKE et ZKE :

$$\sin D = \sin b \cdot \cos a \quad \text{et} \quad \cot P = \cos b \cdot \cot a$$

$$\sin H = \sin B \cdot \cos a \quad \text{et} \quad \cot Z = \cos B \cdot \cot a$$

Ces formules, identiques deux à deux, sont applicables dans tous les cas de figure, les déterminations des différents arcs étant fixées dans le tableau ci-après.



Cas	1	2	3	4
P	< 90°	< 90°	> 90°	< 90°
b	< 90°	< 90°	> 90°	-90° < b < 0°
B = λ + b	< 90°	> 90°	> 90°	< 90°
Z	> 90°	< 90°	< 90°	> 90°

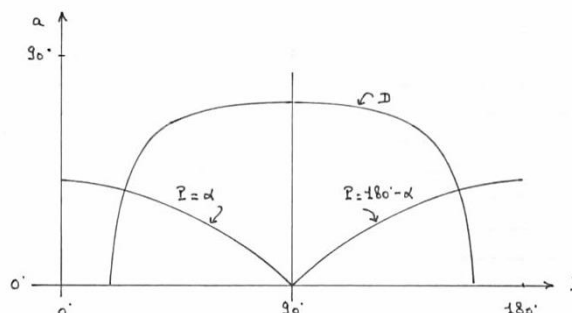
## 2) Construction de l'abaque :

Dans le plan, on définit un repère orthonormé d'axes Oa et Ob. Dans ce repère, on construit les courbes représentatives de :

$$\sin D = \sin b \cdot \cos a \quad \text{et} \quad \cot P = \cos b \cdot \cot a$$

pour une valeur donnée de la déclinaison D et une valeur donnée de l'angle au pôle P et de son supplément, en faisant varier a de 0° à 90° et b de 0° à 180°.

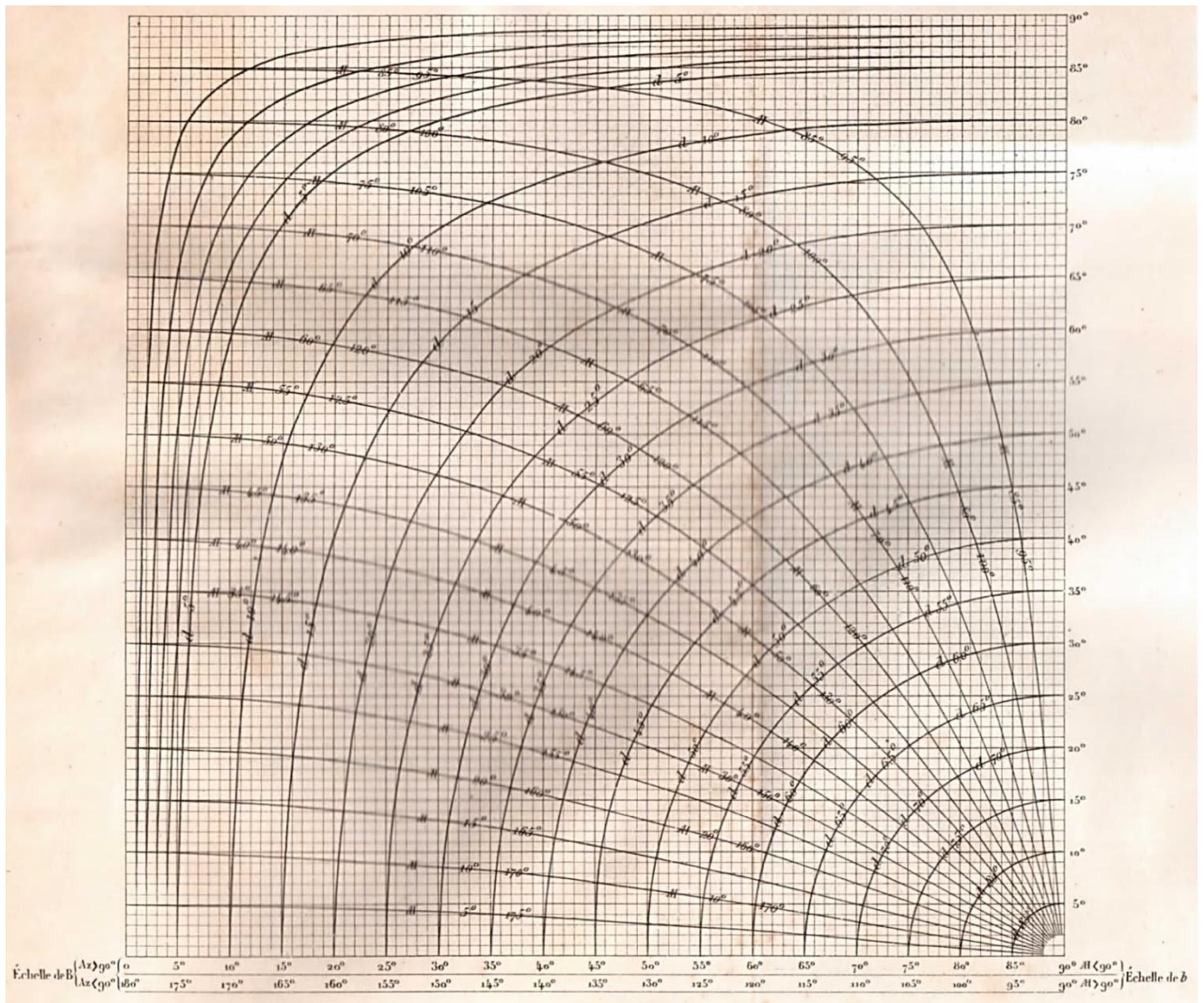
On obtient deux courbes que l'on représente sur la figure ci-dessous :



Ces courbes sont symétriques par rapport à la droite verticale représentative de  $b = 90^\circ$ . Le diagramme pourra donc être représenté sur l'intervalle  $[0^\circ, 90^\circ]$  en abscisses, la graduation horizontale étant doublée par une graduation en valeurs supplémentaires. Dans ces conditions, la courbe relative à P portera aussi l'indication de la valeur supplémentaire.

L'abaque complet est obtenu en construisant l'ensemble des courbes pour des valeurs discrètes de la déclinaison et de l'angle au pôle. On obtient un réseau de courbes comme celui représenté en page suivante où l'intervalle entre valeurs discrètes est de  $5^\circ$ .

Cette figure est extraite du mémoire des auteurs et est destinée à montrer la disposition générale des courbes. On remarque la double échelle des abscisses (b et B) avec le rappel des déterminations correspondantes de l'angle au pôle (noté AH) et de l'azimut (noté Az).

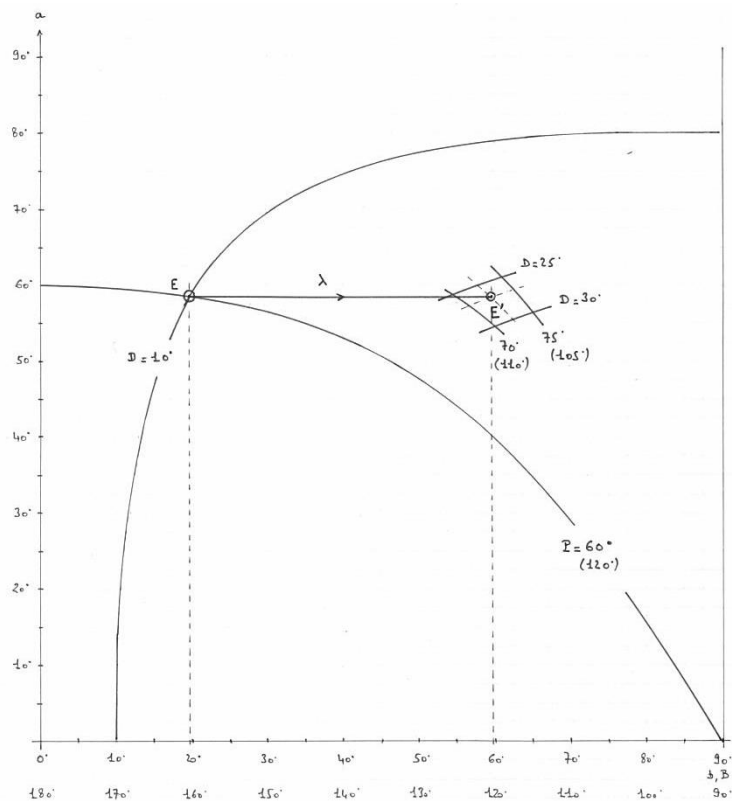


### 3) Principe de détermination de la hauteur et de l'azimut :

La connaissance de l'angle au pôle et de la déclinaison permet de placer un point représentatif E à l'intersection des courbes correspondantes sur l'abaque.

Ce point a pour abscisse b et ordonnée a.

Les formules de calcul étant identiques deux à deux, l'abaque permet la détermination de la hauteur et de l'azimut directement à partir de a, en restant donc à la même ordonnée, et de l'abscisse  $B = b + \lambda$ . On fixe ainsi un point E' pour lequel on lira, par interpolation entre les courbes les valeurs cherchées : la hauteur (courbes « déclinaison ») et l'azimut (courbes « angle au pôle »).



La figure ci-dessus illustre le principe indiqué avec un astre d'angle au pôle  $P = 60^\circ$ , de déclinaison  $D = 10^\circ$  N dont il s'agit de trouver la hauteur et l'azimut en un lieu de latitude  $\varphi = 50^\circ$  N (soit  $\lambda = 40^\circ$ ).

On place donc E à l'intersection des courbes  $D = 10^\circ$  et  $P = 60^\circ$ . On lit  $a = 58,5^\circ$  et  $b = 19,5^\circ$  soit  $B = 59,5^\circ$  et on place E'. Dans le réseau de courbes, on lit  $H = 26^\circ 45'$  et  $Z = 107,3^\circ (> 90^\circ$  car on est dans le cas n° 1).

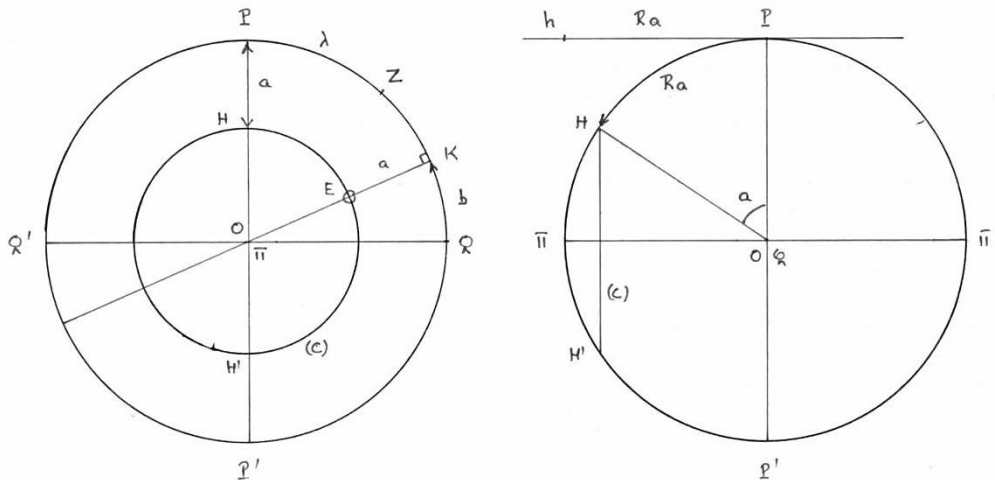
Un calcul précis donne :  $a = 58,525^\circ$ ,  $b = 19,425^\circ$ ,  $B = 59,425^\circ$ ,  $H = 26^\circ 42,8'$ ,  $Z = 107,3^\circ$ .

Nota 1 : dans ce cas, E' est obtenu directement par translation horizontale du point E de la quantité  $\lambda$  car B est inférieur à  $90^\circ$  ; dans le cas où  $B > 90^\circ$ , on procèdera par report de l'abscisse B sur l'échelle supplémentaire.

Nota 2 : la précision des résultats dépend naturellement de l'échelle adoptée et de l'intervalle d'argumentation entre courbes. L'exemple a été traité avec une reproduction de l'abaque publiée dans l'ouvrage de S. de Neufville « la Navigation sans Logarithmes » où l'échelle est de 11 mm par degré sur les axes Oa et Ob ; sur ces courbes, on apprécie au moins le dixième de degré soit  $6'$ .

**Interprétation géométrique, « la carte plate » :**

Considérons une sphère de centre O et de rayon R (qui sera pris comme unité). Sur cette sphère, on fixe un grand cercle de référence (PQP'Q'), de pôles  $\pi$  (sur l'avant du plan de figure ci-dessous, à gauche) et  $\pi'$ . Sur ce grand cercle, on choisit une origine, Q par exemple.



Soit E un point de la surface de la sphère ; ce point peut être fixé à l'intersection :

- d'un demi-grand cercle  $\pi EK\pi'$  dont la position est fixée par l'angle  $b$  qu'il forme avec le plan  $\pi Q\pi'Q'$  (sur la figure ci-dessus à gauche, on ne voit que les traces de ces plans),
- d'un petit cercle, noté (C), de pôles  $\pi$  et  $\pi'$  et de rayon sphérique  $(90^\circ - a)$ .

On a ainsi défini un système de coordonnées sphériques dans lequel  $a$  et  $b$  sont les deux coordonnées nécessaires et suffisantes pour fixer E à la surface de la sphère.

Imaginons maintenant un cylindre tangent à la sphère selon le grand cercle PQP'Q'. On définit la projection telle que :

- les grands cercles passant par  $\pi$  et  $\pi'$  (comme  $\pi EK\pi'$ ) se développent selon des génératrices du cylindre,
- les cercles de la sphère (C), de pôles  $\pi$  et  $\pi'$ , se développent selon des cercles de la surface du cylindre, dans des plans perpendiculaires aux génératrices dont la distance Ph au plan du grand cercle de référence PQP'Q' est égale au développement de l'arc de cercle PH (voir figure ci-dessus à droite).

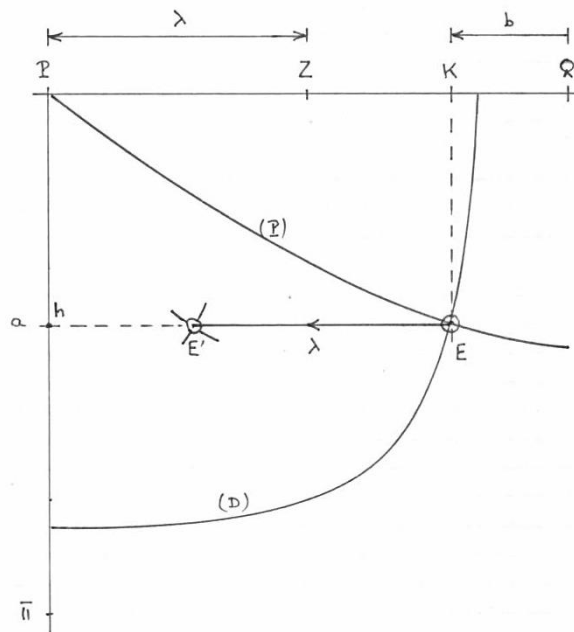
Ouvrons le cylindre selon l'une de ses génératrices et développons sur un plan : nous obtenons la **carte plate**, canevas sur lequel les grands cercles équidistants passant par  $\pi$  et  $\pi'$  sont représentés par des droites équidistantes et les petits cercles équidistants ayant  $\pi$  et  $\pi'$  pour pôles sont représentés par des droites équidistantes, perpendiculaires aux premières<sup>16</sup>.

Sur une carte plate représentant la sphère terrestre, on peut aussi construire les courbes (P) ou (AH) qui sont les lieux des points d'égal angle horaire qui, sur la sphère terrestre sont les méridiens, et les courbes (D) qui sont les lieux des points d'égal déclinaison qui, sur la sphère terrestre, sont les parallèles. Ces courbes sont celles dont on a donné plus haut les équations.

<sup>16</sup> Les échelles sont de plus identiques sur les deux axes de coordonnées d'où le nom de « carte plate ».

Si, dans le raisonnement, on substitue Z, zénith du lieu, au pôle élevé P et l'horizon à l'équateur QQ', les courbes représentent alors respectivement les verticaux (azimut constant) et les almicantarats (hauteur constante). Le passage d'un système à l'autre est obtenu sur la sphère par la rotation selon l'axe  $\pi\pi'$  qui amène Z en P, soit d'un angle égal à la colatitude  $\lambda^{17}$ . Sur la carte plate, cette rotation se transforme en une translation  $\lambda$  puisque  $a$  reste constant.

La figure ci-dessous illustre le développement de la carte plate, P, Z, E, K, Q et  $\pi$  étant les images des points de même nom situés sur la sphère.



Nota : sur la figure représentant la sphère, le triangle de position de l'astre PZE n'a pas été complètement tracé ; le point noté K représente le pied de la hauteur sphérique abaissée de l'astre E.

### Réalisation pratique et procédure d'emploi :

A l'époque les cartes marines étaient imprimées sur un papier dont le format ne pouvait excéder la taille dite « grand aigle » soit 75 sur 105 cm. Ce format sera donc choisi pour l'impression de l'abaque dont la dimension sera ramenée à un carré de 99 cm de côté partagé horizontalement en deux feuilles.

Dans ces conditions, l'échelle est de 11 mm par degré et les courbes sont tracées de  $10'$  en  $10'$  ; l'intervalle minimal entre deux courbes est alors de 1,83 mm. La figure ci-après, extraite du mémoire de présentation, représente une portion de l'abaque de  $10^\circ$  sur  $10^\circ$  « à l'échelle d'exécution ». Les auteurs indiquent que l'on « (...) interpole facilement à vue à 1/10 près ; on obtient donc une approximation de  $1'$ . »

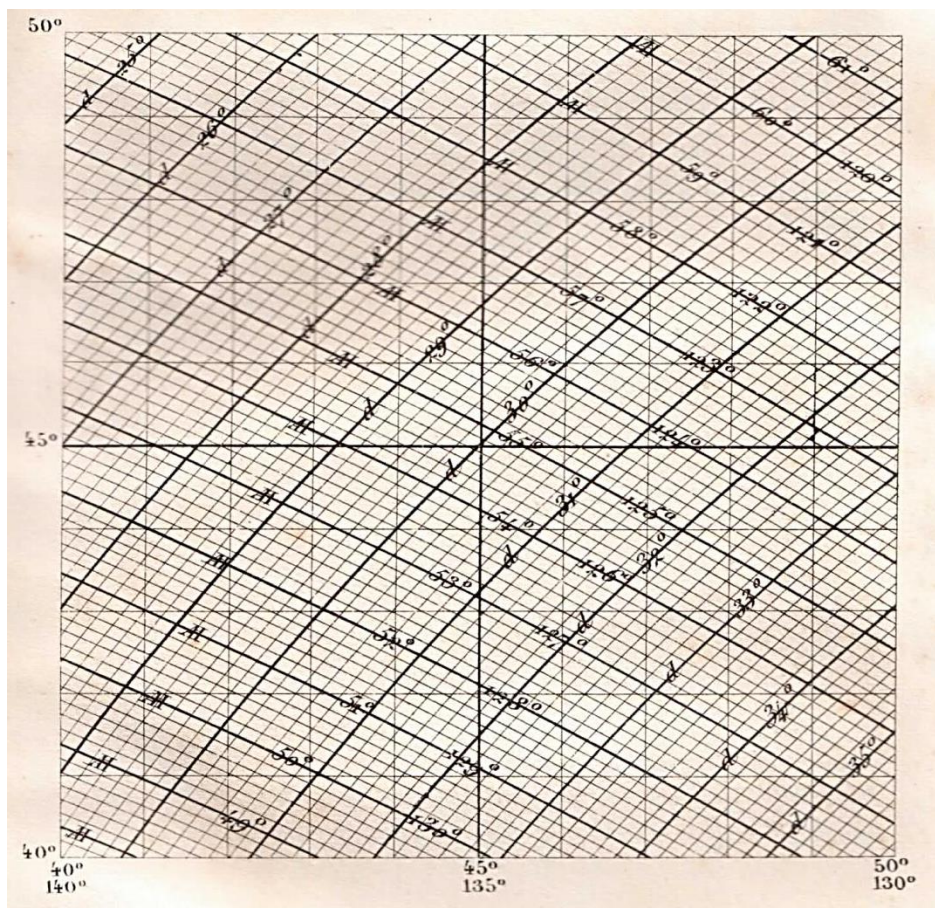
On émettra ici quelques doutes sur l'approximation de la minute qui paraît bien optimiste et ne peut raisonnablement être atteinte que dans d'excellentes conditions de travail, notamment d'éclairage. Au travers des différents exemples traités, il paraît plus réaliste d'annoncer le dixième de degré (soit  $6'$ ) ce qui est excellent pour l'azimut mais un peu grossier pour la hauteur ; la mesure peut être affinée en évitant tout trait ou marque au crayon et en utilisant exclusivement un compas à pointes sèches associé

<sup>17</sup> Un procédé équivalent avait été étudié avec la projection stéréographique du quadrant planisphérique de Ch. Bertin.

à une échelle d'interpolations. Dans ces conditions, on peut facilement prétendre à une précision de l'ordre de 2 à 3'.

Dans le cas du calcul des éléments d'une droite de hauteur selon le procédé Marcq de Saint-Hilaire, et à partir du point estimé, la procédure d'emploi est la suivante :

- calculer les coordonnées horaires de l'astre (P et D) pour l'instant de l'observation (Ephémérides),
- placer l'astre E sur l'abaque à l'aide des coordonnées qui viennent d'être calculées,
- lire les coordonnées rectangulaires correspondantes a et b,
- calculer  $B = \lambda + b$  algébriquement (voir tableau des cas de figures),
- placer le point E' de coordonnées rectangulaires a et B,
- le réseau de courbes représentant maintenant les verticaux et les almicantarats, lire la hauteur estimée sur les courbes (D) et l'azimut sur les courbes (P),
- calculer l'intercept et exprimer l'azimut dans le quadrant considéré.



**Autres usages et commentaires :**

L'abaque de Favé et de Rollet de l'Isle a été conçu à l'origine pour effectuer le calcul de transformation des coordonnées horaires (P, D) aux coordonnées horizontales (Z, H). La transformation inverse est naturellement tout aussi simple à effectuer et l'abaque pourra être utilisé

pour effectuer un simple calcul d'angle horaire ou procéder à l'identification d'un astre observé. L'abaque peut également être employé pour effectuer les calculs de navigation orthodromique ainsi que certains calculs particuliers comme ceux relatifs aux lever et coucher d'un astre.

A la différence d'autres abaques, il n'y a aucun tracé, ni construction graphique, à effectuer sur le diagramme, ce qui autorise le fractionnement de l'abaque en autant de partie que l'on désire, ceci afin de réduire l'encombrement et/ou, simultanément, d'agrandir l'échelle, donc la précision des relevés ; on note de plus que l'exactitude du relevé ne sera que peu altérée si le support a subi des déformations (du fait de l'humidité notamment).

L'abaque de Favé et Rollet de l'Isle a très certainement obtenu un certain succès lors de sa publication du fait de sa réelle facilité d'emploi. Il fit notamment l'objet d'une édition particulière à l'initiative de Eugène Pereire, président de la Compagnie Générale Transatlantique, en 4 feuilles à l'échelle de 12 mm par degré, en 1894. Les travaux de Favé et Rollet de l'Isle ouvrirent la voie à P. Constan qui publia ses tables graphiques en 1906 et les réédita en 1927 ; l'abaque est aussi reproduit tel quel, mais fractionné en 54 tableaux, par S. de Neufville dans son ouvrage « La Navigation sans Logarithmes », publié à l'attention des navigateurs de plaisance en 1945 et réédité en 1950.

L'enseignement maritime commercial est malheureusement quasiment muet sur cet abaque. Mis à part le cours élémentaire d'astronomie et de navigation du professeur d'hydrographie P. Constan, qui en indique la théorie, les autres ouvrages de référence (comme le Traité de Navigation de l'Inspecteur général d'hydrographie G. Massenet) ne donnent aucun élément relatif à cet outil de calcul. C'est regrettable car l'abaque de Favé et Rollet de l'Isle, s'il est naturellement affecté des inconvénients inhérents aux méthodes de calculs graphiques, donne aisément une valeur approchée de la hauteur avec une précision au moins égale au dixième de degré et une valeur d'azimut conforme à la norme usuelle du demi-degré. L'abaque peut donc servir à déterminer l'azimut et à contrôler un calcul de la hauteur. Il trouvera également sa pleine application dans la préparation du point crépusculaire où on détermine à l'avance, à partir de la position estimée et pour l'heure du crépuscule, les hauteurs et azimuts approchés des étoiles et planètes dont l'observation est pertinente.

On a également remarqué que cet outil de calcul s'inscrit dans une voie résolument moderne pour l'époque en privilégiant la méthode de Marq de Saint-Hilaire et en introduisant, à l'instar des anglo-saxons, l'emploi du degré pour caractériser l'angle horaire.

## TABLES GRAPHIQUES D'AZIMUTS P. CONSTAN

### **Introduction :**

Paul Constan, professeur d'hydrographie<sup>18</sup>, est l'auteur de plusieurs ouvrages à l'attention des élèves des écoles d'hydrographie et des officiers de la marine marchande. On relève notamment un « Cours d'Astronomie et de Navigation », en deux tomes, publiés en 1903 et 1904 ; cet ouvrage sera plusieurs fois réédité et comportera trois parties dans ses dernières éditions<sup>19</sup> ; on relève également un « Cours de trigonométrie sphérique » publié en 1906 « à l'usage des marins et des personnes qui ont en vue l'étude de l'astronomie ou de la géodésie ». Les travaux de recherches qu'a mené P. Constan avaient pour objectif essentiel la simplification des calculs nautiques et leur conduite aussi sûre que possible ; il est visiblement peu attiré par l'usage du point auxiliaire et par les tables de résolution des triangles rectangles à double entrée (Aquino, Bertin, de Catalano etc) et s'oriente vers la conception de tables de logarithmes à 5 décimales destinées à effectuer le calcul classique de la hauteur estimée par la méthode semi-logarithmique, ainsi que vers l'outil de calcul graphique. Il publie ainsi dès 1904 un recueil de tables « permettant de simplifier et d'abrégier les calculs nautiques en évitant les interpolations » et une première version des « Tables graphiques d'azimuts » en 1906. Ces deux ouvrages furent revus et améliorés et réédités en 1927 pour les « Tables graphiques d'azimuts » et 1930 pour les « Tables de logarithmes à cinq décimales et tables nautiques usuelles ». Les deux documents étaient conçus pour être réunis.

Dans l'avertissement des Tables graphiques d'azimuts, P. Constan écrit, en 1927 :

*« L'étude des remarquables travaux de MM. Favé et Rollet de l'Isle, Ingénieurs hydrographes de la Marine, sur la détermination du point rapproché au moyen d'un abaque, nous a conduit à rechercher si, dans le même ordre d'idées, il ne serait pas possible de trouver une relation ayant l'avantage :*

- 1) De donner le relèvement et la hauteur au moyen d'échelles à divisions égales, afin de rendre plus commodes les lectures de ces éléments ;*
- 2) De permettre de lire le relèvement et la hauteur sur des échelles dont la disposition rappelle celle de ces coordonnées sur la sphère céleste, afin de réduire le plus possible les chances de confusion ;*
- 3) De donner ces éléments au moyen de graphiques de dimensions très réduites et permettant, néanmoins, d'avoir une approximation largement suffisante pour tous les besoins de la pratique.*

On ne peut être plus clair dans l'exposé des objectifs que P. Constan atteindra sur la base de l'abaque de Favé et Rollet de l'Isle.

---

<sup>18</sup> Ancien Officier de Marine né en 1869 et entré à l'Ecole Navale en 1887 ; il aurait notamment enseigné à Agde (1900) et a été longtemps en poste à St-Brieuc (1904 à 1918 au moins) dont il aurait aussi été le directeur.

<sup>19</sup> Les ouvrages de P. Constan ont été publiés chez Challamel puis à la Société d'éditions géographiques maritimes et coloniales à l'exception du cours d'astronomie et de navigation publié chez Gauthier-Villars.



**Principe de construction des tables graphiques :**

(voir pages 15 et suivantes de la fiche pour la définition des notations et cas de figure)

P. Constan utilise le même concept de carte plate que Favé et Rollet de l'Isle. Afin de pouvoir porter déclinaison et hauteur et angle au pôle et azimut sur des échelles constantes, il va chercher le développement cylindrique qui transforme les méridiens (respectivement verticaux) et parallèles (respectivement almicantarats) en deux réseaux perpendiculaires de droites parallèles.

Il utilise ensuite la même décomposition du triangle de position de l'astre PZE en deux triangles rectangles PKE et ZKE ; on posera de même, dans un premier temps,  $KE = a$  (hauteur du triangle) et  $QK = b$  (latitude du point K) ;

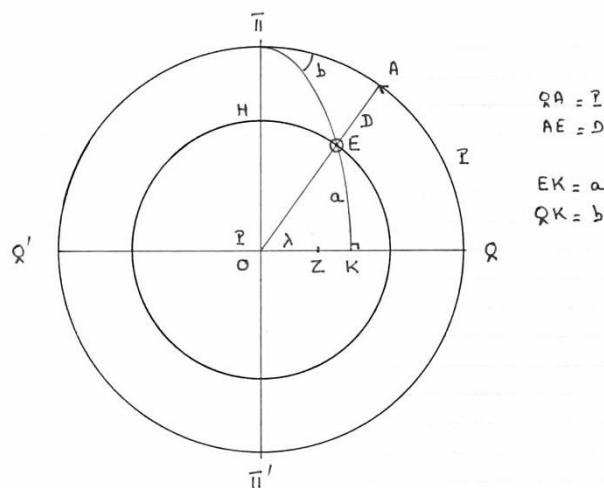
Enfin, utilisant les formules de trigonométrie du triangle rectangle, P. Constan établit les relations suivantes entre les différents éléments :

$$\sin a = \sin P \cdot \cos D \quad \text{et} \quad \cot b = \cos P \cdot \cot D$$

$$\sin a = \sin Z \cdot \cos H \quad \text{et} \quad \cot(\lambda + b) = \cos Z \cdot \cot H$$

Ces relations sont applicables quelque-soit le cas de figure avec les règles indiquées dans le tableau de la page 17.

Considérons maintenant la sphère terrestre représentée sur la figure ci-dessous vue d'un point situé sur la ligne des pôles. P désigne le pôle élevé et le grand cercle  $\pi Q \pi' Q'$  représente l'équateur choisi comme cercle de référence. Q est point origine. E représente la projection terrestre de l'astre à l'intersection de son cercle horaire (méridien), dont la trace est la demi-droite passant par P et E, et de son parallèle diurne, représenté par un petit cercle concentrique à  $\pi Q \pi' Q'$  et de rayon  $(90^\circ - D)$ .



Considérons ensuite le cylindre tangent à la sphère selon le grand cercle de référence (l'équateur) et développons la sphère sur le cylindre :

- le méridien de l'astre se développe suivant une génératrice,
- son parallèle diurne se développe selon un cercle du cylindre perpendiculaire aux génératrices.

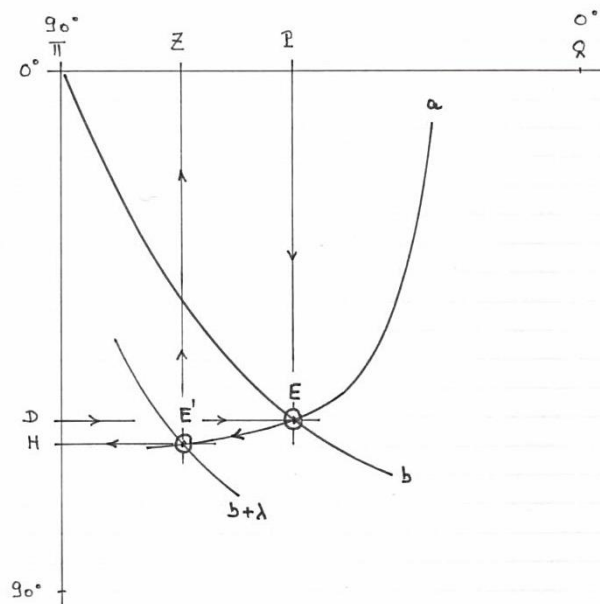
En définitive, les méridiens et les parallèles se développent sur le cylindre en deux réseaux perpendiculaires dont l'écartement unitaire est identique. Si on ouvre le cylindre selon une de ses

génératrices et qu'on le développe sur un plan, on obtient une carte plate constituée de deux réseaux de droites perpendiculaires également espacées.

Si on considère maintenant les petits cercles de pôles  $\pi$  et  $\pi'$ , passant par E, dont la distance angulaire au grand cercle PQP'Q' est a, nous obtenons sur la carte plate une courbe dont les points de coordonnées P et D satisfont à l'équation :  $\sin a = \sin P \cdot \cos D$ .

De même, si on considère les grands cercles  $\pi EK\pi'$  faisant l'angle b avec l'équateur, on obtient sur la carte plate une courbe dont les points satisfont à l'équation :  $\cot b = \cos P \cdot \cot D$ .

La carte plate et les courbes considérées ont l'allure représentée sur la figure ci-dessous ; elles sont identiques à celles obtenues sur l'abaque Favé et Rollet de l'Isle (on aura remarqué que l'on passe des équations de Favé-Rollet de l'Isle à celles de Constan en permutant respectivement a et D et b et P).



Connaissant les coordonnées horaires de l'astre E (angle au pôle P et déclinaison D), il est facile de le placer sur la carte plate par ses coordonnées cartésiennes. Si un réseau des courbes « a » et « b » est tracé, on pourra lire sur ce diagramme les éléments a et b pertinents.

Si, ensuite, on imprime un mouvement de rotation d'axe  $\pi\pi'$  et d'angle  $\lambda$  des points de la sphère terrestre pour amener Z, zénith du lieu, à la place qu'occupait P, on remarque que :

- a est resté invariant,
- E vient en E' tel que le grand cercle  $\pi E'\pi'$  fasse l'angle  $\lambda + b$  avec l'équateur.
- sur la sphère, cette rotation amène le grand cercle horizon dans le plan de figure ; les coordonnées sphériques de E', référencées au zénith et à l'horizon, sont les coordonnées horizontales de E.

Sur le diagramme, on déplacera le point représentatif sur la courbe caractéristique de « a » jusqu'à venir couper la courbe caractéristique de « b +  $\lambda$  ». Cette intersection est représentative du point E' dont les coordonnées cartésiennes sont les éléments cherchés : azimuth Z et hauteur H.

Le premier objectif fixé par P. Constan est ainsi atteint.

**Les tables graphiques de Paul Constan :**

Sur la base théorique qui vient d'être exposée, P. Constan construit un abaque :

- dont l'axe des abscisses est gradué en valeurs d'angle horaire local (exprimées en heures et minutes de 0 à 24 h) et d'azimut (en degrés, de 0° à 90°),
- dont l'axe des ordonnées est gradué en valeurs de déclinaison et hauteur de 0° à 90°.

Il note  $\alpha = (90^\circ - a)$  et  $\beta = b$  et construit les réseaux à  $\alpha$  et à  $\beta$  constants avec un intervalle d'argumentation de 1°.

Comme, pour des valeurs d'angle au pôle comprises entre 0° et 180°, le diagramme est symétrique par rapport à la droite verticale 90°, seul le 1<sup>er</sup> quadrant est représenté (comme pour l'abaque Favé et Rollet de l'Isle). Les courbes  $\beta$  sont donc graduées en valeur directe inférieure à 90° et en valeur supplémentaire. Il en est de même pour les valeurs d'angle au pôle et d'angle horaire local correspondant (noté Tag). L'azimut est, par contre, simplement gradué pour un quadrant.

L'abaque est ensuite construit sur la base d'un carré de 36 cm de côté, ce qui correspond à une échelle de 4 mm par degré sur les deux axes de coordonnées. L'abaque est ensuite fractionné en 4 parties de 18 cm de côté (soit 45°) qui constituent 4 pages impaires successives de l'ouvrage, la page paire située en vis-à-vis rappelant le mode opératoire de résolution des principaux problèmes.

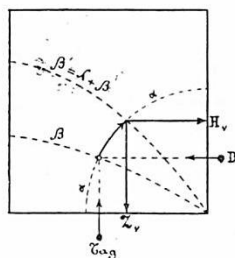
Avec ces dispositions, P. Constan a ainsi atteint l'ensemble des objectifs qu'il s'était fixé.

Les extraits ci-après représentent une partie de page des tables graphiques dans laquelle on illustre la recherche de l'azimut et de la hauteur d'un astre d'angle au pôle  $P = 60^\circ$  (4 h), de déclinaison  $D = 10^\circ$  N en un lieu de latitude  $\varphi = 50^\circ$  N (exemple de la page 19).

On remarque qu'il n'est pas nécessaire de noter l'élément  $\alpha$  mais qu'il convient de suivre un parcours curviligne que l'on interpole à vue jusqu'à venir couper le courbe, également interpolée à vue, correspondant à  $\beta + \lambda \approx 19,5^\circ + 40^\circ = 59,5^\circ$ . On lit donc, approximativement, un azimut  $Z = S72,5^\circ$  (E ou W suivant la valeur de l'angle horaire local) et une hauteur de  $25,7^\circ$ .

Le mode opératoire d'une recherche des coordonnées horizontales figurant dans le document, en page paire, est reproduit ci-dessous.

**RELÈVEMENT ET HAUTEUR**



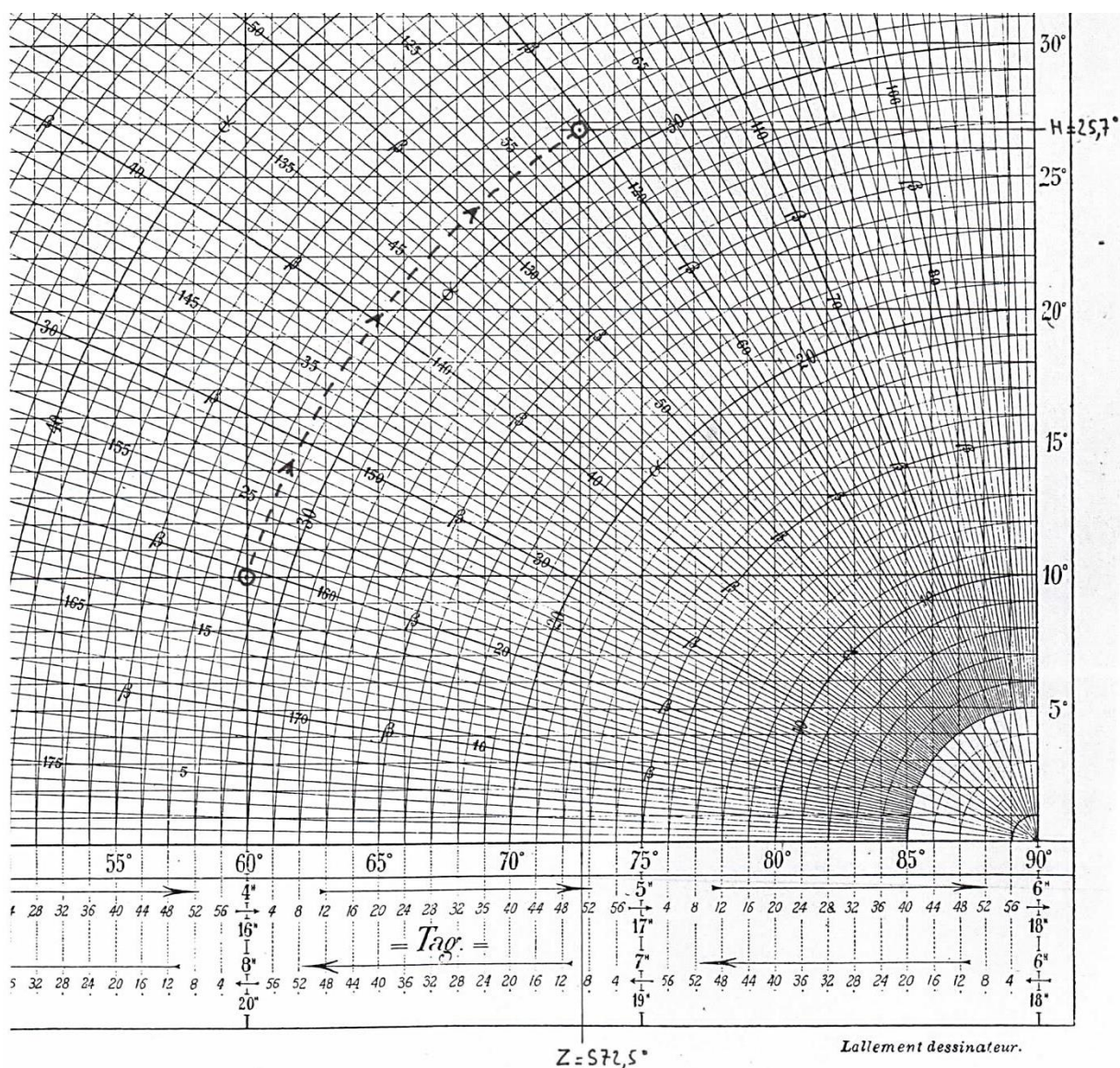
$\beta \begin{cases} \text{aigu si Tag est compris entre } 0^h \text{ et } 6^h \text{ ou entre } 18^h \text{ et } 24^h. \\ \text{obtusi si Tag est compris entre } 6^h \text{ et } 18^h. \end{cases} \quad \beta \begin{cases} + \text{ si L et D même nom.} \\ - \text{ si L et D noms contraires.} \end{cases}$

$\beta' = \lambda + \beta \text{ (si } \lambda + \beta < 180^\circ)$        $\beta' = \lambda + \beta - 180^\circ \text{ (si } \lambda + \beta > 180^\circ)$

Compter  $Z_v \begin{cases} \text{du pôle élevé si } \lambda + \beta \text{ est comprise entre } 90^\circ \text{ et } 270^\circ. \\ \text{du pôle abaissé si } \lambda + \beta \text{ est inférieure à } 90^\circ. \end{cases}$

Donner à  $H_v$  le signe  $\begin{cases} + \text{ si } \lambda + \beta \text{ est positive et inférieure à } 180^\circ. \\ - \text{ si } \lambda + \beta \text{ est négative ou supérieure à } 180^\circ. \end{cases}$

Nota : si la hauteur est positive, il n'y a pas lieu de considérer des valeurs  $\lambda + \beta > 180^\circ$ .



**Commentaires :**

L'abaque a le même champ d'application que celui de Favé et Rollet de l'Isle : calculs d'azimut et hauteur, reconnaissance d'un astre, navigation orthodromique, lever et coucher d'un astre etc ... Dans le fond, seule la disposition varie d'un diagramme à l'autre ainsi que l'échelle, plus petite chez Constan. L'intérêt des tables de P. Constan est de ne viser en fait que le calcul graphique d'azimut (au demi-degré), la hauteur étant calculée précisément avec les tables de logarithmes qu'il a spécialement conçues et qui sont incluses dans le même document. La hauteur déterminée graphiquement est intéressante à titre de vérification et d'évaluation préparatoire à un point crépusculaire.

A noter que P. Constan avait estimé que l'emploi des tables qu'il avait conçues (graphiques et logarithmes à 5 décimales) conduisait, pour le calcul d'un point complet, à un gain de temps d'environ 40% par rapport aux autres tables « *actuellement connues* »<sup>20</sup>. Il attribuait ce gain de temps simultanément à la disposition des différentes tables, utilisées successivement dans l'ordre de la pagination, et à leur conception qui permettait de limiter les calculs d'interpolation.

<sup>20</sup> Cours d'astronomie et de navigation ; tome 3, édition 1936, page 64, article 95.

<p style="text-align: center;"><b>DIAGRAMMES et ABAQUES</b></p> <p style="text-align: center;"><b>COMMENTAIRES</b></p>
--

*Quelques commentaires autorisés :*

En annexe de notre analyse du diagramme de Weir, nous avons reproduit les commentaires formulés par S. T. S. Lecky, Capitaine au Long-Cours et auteur des célèbres « Wrinkles in Practical Navigation » qui firent longtemps référence outre-Manche. On a relevé que l'auteur était « *not in love with mathematical diagrams of any sort* » essentiellement pour des raisons d'encombrement et d'érosion de la trame du document avec les pointages et gommages successifs.

Le Bowditch (1977) indique (article 2119, page 600) :

*« In general, graphical and mechanical solutions have not proved popular, for several reasons:*

*First, they generally involve a small scale, yielding results of less accuracy than desired, even with careful work.*

*Second, some of the methods must be used as a whole, and cannot be divided into parts to increase scale.*

*Third, such methods usually do not provide a record of solution, and it is often difficult to check the results.*

*Fourth, solutions requiring instruments are subject to error due to lack of proper adjustment or mechanical damage which may not be apparent.*

*Fifth, the required diagrams or instruments may be quite bulky, requiring considerable space for stowage and manipulation. »*

En France, Pierre Hugon écrit, dans la revue de l'Institut Français de Navigation de janvier 1953, en page 16 et 17:

*« Pour en revenir aux solutions graphiques des calculs astronomiques, on sait que d'innombrables chercheurs et théoriciens ont imaginé des systèmes de résolution du triangle de position. Certains de ces abaques sont célèbres, comme les abaques d'Ocagne, de Rollet de l'Isle, de Rust, etc. Les conditions d'emploi, sur une passerelle, plus ou moins abritée, ont vite fait de maculer, de déformer ou de froisser ces feuilles dont, souvent, les dimensions exigées pour obtenir l'approximation nécessaire et éviter l'emploi d'une loupe, sont peu compatibles avec l'espace vital de l'officier de quart. Mais la répugnance de l'utilisateur en face de ces solutions ingénieuses doit, raisonnablement, se taire devant la commodité et le format modeste des graphiques d'azimut qui permettent, par un seul coup d'œil et deux ou trois traits de crayon, de déterminer le relèvement d'un astre.*

*Cette solution pourrait être utilement généralisée plutôt que le recours à ces tables d'azimut, qu'elles soient de Perrin, de Blackburne ou de Johnson, qui exigent toujours trois entrées et trois feuilletages. »*

### **Commentaire final :**

D'une manière générale, les abaques ou diagrammes n'ont jamais eu la faveur des officiers de quart, toutes marines confondues, à l'exception, peut-être, du graphique de Cornet (ou du diagramme de Weir), et ceci malgré les efforts de nombreux chercheurs de talent qui ont imaginé de multiples solutions, certaines particulièrement ingénieuses, dans le but de trouver rapidement et simplement les éléments recherchés avec une précision suffisante. Les raisons profondes en ont été données dans les différents commentaires ci-dessus. Ajoutons que les techniques de calcul graphique appliquées aux calculs de navigation astronomique<sup>21</sup> n'ont jamais fait partie intégrante des enseignements dispensés officiellement dans les écoles de la marine marchande.

Il est clair que, concernant le calcul de la hauteur en vue d'un calcul d'intercept à la minute près, les diagrammes sont en général insuffisants à moins de disposer d'un graphique à la bonne échelle (12 mm par degré au moins), d'une grande table à carte, d'un excellent éclairage et, le cas échéant, d'une loupe. Il nous paraît donc évident que les tables, pour ce calcul, donneront un résultat plus sûr et au moins aussi précis sous un délai qui ne sera pas forcément beaucoup plus long. L'idée du fractionnement de l'abaque pour le présenter en feuillets de dimensions réduites à grande échelle est alors intéressante. C'est la voie qu'ont suivie des auteurs comme P. Constan, S. de Neufville et G. Littlehales. On constate malheureusement qu'une bonne échelle, sous une taille raisonnable, ne peut être obtenue qu'avec un fractionnement en nombreuses parties : l'abaque Favé et Rollet de l'Isle est divisée en 54 parties par S. de Neufville dans sa « Navigation sans Logarithmes » tandis que G. Littlehales découpe une projection stéréographique de la sphère en 368 parties. On risque donc d'aboutir à des ouvrages lourds et peu commodes d'emploi, ce qui est en contradiction complète avec l'objectif de l'abaque.

Dans le cas du calcul d'azimut, au demi-degré près, l'abaque fait, à notre sens, jeu égal avec les tables comme celles de Perrin (ou A.B.C.) et de Bataille, à la condition que l'abaque en question soit de lisibilité aisée. On a en effet remarqué que la qualité de l'impression, de la typographie et du support jouait un rôle fondamental : une typographie uniforme et un peu grasse sur un papier terne conduit à des risques de confusion de lecture. A contrario, une impression en plusieurs couleurs, pour différencier la nature des courbes, vient améliorer la lisibilité et ainsi réduire les risques d'erreur.

Un abaque présente enfin des avantages très nets dans les résolutions approchées comme l'identification d'un astre et la préparation du point crépusculaire où la précision des résultats attendus est de l'ordre du degré.

---

<sup>21</sup> Ces techniques étaient par contre utilisées réglementairement dans les calculs de marée.