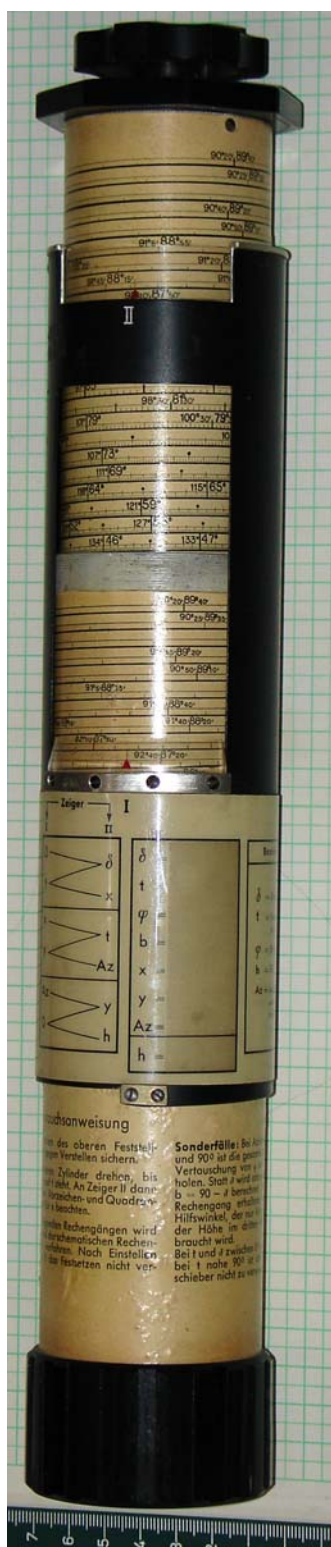


Calcul de navigation

État courant de l'étude de l'hélice logarithmique MHR1 de Dennert et Pape

Serge Savovsky, Dr ès Sc

ndlr : Dans le texte, les chiffres romains renvoient vers la bibliographie, les chiffres arabes vers les notes de bas de pages.



1 : Instrument prêt pour le calcul.



Figure 2 : 290x(φ=65). Boîtier : 320x102x90. Col. SS.

AVANT-PROPOS

Cette monographie concerne un instrument logarithmique imaginé avant la dernière guerre mondiale pour faciliter les calculs de position d'un bâtiment en mer ou d'un aéronef en vol : le « *Höhenrechnscheiber MHR1* » conçu et produit par la firme allemande Dennert et Pape¹.

Nous entrons avec cet instrument dans le domaine du calcul astronomique. Les astres constituant des points de repères pour le navigateur, les données les concernant et utilisées pour la navigation sont, au sens propre, des valeurs de grandeurs astronomiques. Le traitement de telles données pour connaître une position implique des calculs si rébarbatifs qu'il entretint de tous temps chez les calculateurs une véritable obsession d'améliorer leurs méthodes et moyens de travail ; il explique également le sens figuré de l'expression « calcul astronomique » désignant traditionnellement une suite pénible et interminable d'opérations ; le genre d'occupation à la fin de laquelle l'exécutant, soulagé, soupire : ouf !

Le *MHR1* est exemplaire pour illustrer l'apport du collectionneur dans la sauvegarde d'un patrimoine technique. Bien que récent, l'instrument est rare et il fallait un amateur présent au bon moment et au bon endroit pour le préserver d'une disparition probable.

Les techniciens qui l'utilisèrent autrefois sont introuvables² et hormis les quelques feuillets manuscrits oubliés dans son coffret (fig. 14 à 17) rien ne fut retrouvé à son sujet ; certaines lignes de ces feuillets sont manifestement des interprétations de règles très sommaires d'utilisation, en allemand, fixées à la base de l'instrument. La compréhension de ces règles est malaisée et leur interprétation sur les feuillets semble contestable sur quelques points signalés dans la suite ; la qualité de l'étude souffre de ces ambiguïtés. La recherche d'une documentation pertinente demeure donc indispensable pour une bonne compréhension de l'instrument mais reste pour l'instant stérile.

Rassemblant des souvenirs de cours de trigonométrie et de cours de navigation aérienne il fut cependant possible de reconstituer aussi exactement que possible quelques éléments opératoires. Mais cette monographie reste incomplète sur bien des points, historiques notamment. Aussi il est fait appel aux lecteurs qui pourraient éventuellement détenir quelque information sur ce sujet ; le texte serait alors actualisé en conséquence.

¹ Le site Internet de cette société ne comporte aucune référence pour cet objet.

² S'agissant de personnes de la même génération que l'auteur, il doit bien en exister quelques-uns !

INTRODUCTION

La **Présentation de l'instrument** et celle du type de calculs auxquels il fut destiné restent pour l'instant sommaires en raison de la pauvreté des informations actuellement possédées. Ce type de calculs apparaît en navigation pour déterminer un triangle de position ou une droite de hauteur : les définitions de ces concepts appartenant à la trigonométrie sphérique et leur modélisation mathématique forment les **Éléments théoriques** du deuxième chapitre. Enfin le troisième chapitre présente le **Mode d'emploi** de l'instrument pour l'exploitation numérique des éléments précédents.

1 PRÉSENTATION DE L'INSTRUMENT : HÖHENRECHENSCHNEIDER MHR1

1.1 Description¹

L'instrument fut conçu et fabriqué par Dennert et Pape ; l'exemplaire examiné porte la référence : *Système Bygrave, Werk nr. 90424*

Utilisé pour résoudre le triangle de position en navigation à partir de l'observation au sextant du soleil ou d'étoiles, il fut employé, notamment pendant la deuxième guerre mondiale par les officiers de navigation des unités de la *Kriegsmarine* et de la marine marchande allemande (calculs d'azimut) et aussi en navigation aérienne (droites de hauteur). Le service hydrographique de la Marine Nationale française avait fait l'acquisition d'un très petit nombre de ces instruments (ii).

Deux cylindres coaxiaux I et II portent chacun une échelle logarithmique hélicoïdale d'environ 8,5m de développement. I est fixe ; II, inséré dans I, est mobile en translation et rotation. Une molette à la partie supérieure permet de solidariser ou désolidariser I et II. Un troisième cylindre enveloppant l'ensemble porte deux index I et II pointant sur les échelles I et II respectivement visibles dans la fenêtre au dessus de l'index I et dans l'échancrure au dessus de l'index II. Des instructions sommaires en allemand figurent sur la partie fixe ; elles sont copiées fig. 3. La notice en français (ii, fig. 15 à 17) fut vraisemblablement rédigée ultérieurement en s'appuyant sur ces instructions. Certainement fort compréhensible pour un officier de marine habitué au calcul de navigation, sa teneur est moins immédiate pour l'amateur qui découvre l'instrument et cherche à le préserver et à mémoriser le savoir-faire qui lui était associé ; enfin, certains éléments de cette notice semblent résulter d'une interprétation inexacte de l'allemand.

Gebrauchsanweisung

Beide Skalen enthaltendoppelte Gradbezeichnung, rechts zählend von 0° bis 90°, links zählend von 90° bis 180°. Der Stundenwinkel ist Gradmaß umzuwandeln.

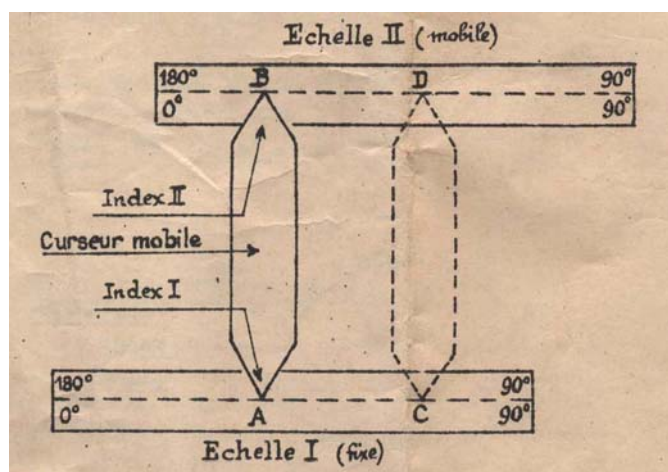
1. Gemäss der schematischen Rechenanweisung (Zickzacklinie) Zeiger I auf 0EO der unteren Skala (Anschlag) stellen, den inneren Zylinder herausziehen und ihn soweit drehen, bis Zeiger II auf δ steht.
2. Die beiden Rechenzylinder durch Linksdrehen des oberen Feststellknopfes gegen Verstellen sichern.
3. Den unteren Zylinder drehen, bis Zeiger I auf t steht. An Zeiger II dann x ablesen. Vorzeichen- und Quadrantenregel für beachten.

Bei den folgenden Rechengängen wird entsprechend des schematischen Rechenanweisung verfahren. Nach Einstellen bei Zeiger II das Festsetzen nicht vergessen.

Sonderfälle: Bei Azimut zwischen 85° und 90° ist die gesamte Rechnung unter Vertauschung von φ und δ zu wiederholen. Statt δ wird also φ eingesetzt und $b = 90 - \delta$ berechnet. Das im zweiten Rechengang erhaltene Azimut ist ein Hilfswinkel, der nur für die Berechnung der Höhe im dritten Rechengang gebraucht wird.

Bei t und δ zwischen 0° und 0°20' sowie bei t nahe 90° ist der Höhenrechenschieber nicht zu verwenden.

3 : copie du mode d'emploi fixé sur l'instrument dans sa partie basse, partiellement visible figure 1.



4 : Mode opératoire (extrait de la figure 15).

1.2 Usage

Le cylindre I porte une échelle hélicoïdale logarithmique de cosinus doublement graduée pour des angles de 0° à 89°40' ou de 145° à 90°20'. II porte une échelle hélicoïdale logarithmique de tangentes, graduée également pour des angles de 0° à 89°40' ou de 180° à 90°20'. l'infini est évidemment hors des deux échelles en dépit de leur longueur...

Hormis dans le paragraphe **Triangle sphérique**, tous les angles sont en valeur absolue. Ensuite, s'agissant d'échelles logarithmiques, les fonctions cos et tg doivent être considérées en valeurs absolues pour tous les angles obtus. Enfin, l'échelle I est orientée de droite à gauche car la fonction $\log |\cos x|$ croît de $-\infty$ à 0

pour x variant de 90° à 0° (ou 180°) et l'échelle II est orientée de gauche à droite puisque la fonction $\log |\operatorname{tg} x|$ croît de $-\infty$ à $+\infty$ pour x variant de 0° à 90° (ou 180° à 90°).

Les échelles ainsi précisées permettent de résoudre l'équation :

$$(1) \cos A \operatorname{tg} B = \cos C \operatorname{tg} D$$

dans laquelle l'un quelconque des quatre paramètres A , B , C ou D est inconnu. Supposons que l'inconnue soit D .

On place l'index I du curseur vis à vis de A dans l'échelle I puis on déplace l'échelle II pour placer B dans l'échelle II devant l'index II du curseur. Les deux échelles sont alors solidarisées. On déplace enfin le curseur en plaçant son index I vis à vis de C sur l'échelle I ; son index II se trouve alors vis à vis d'une graduation D de l'échelle II.

Les graduations A , B , C , D sont telles qu'en valeurs absolues $AC = -BD^3$, soit :

$$(2) \log \cos A - \log \cos C = \log \operatorname{tg} D - \log \operatorname{tg} B$$

Cette relation est la transformée logarithmique de la relation (1) ; D est donc calculable avec cet instrument, en prêtant toutefois la plus grande attention au choix pour D entre deux valeurs possibles complémentaires à π .

Constatons qu'il s'agit d'un simple calcul de règle de trois que l'on pourrait exécuter sur n'importe quelle règle logarithmique ; l'astuce du concepteur de l'instrument ou de l'un de ses nombreux prédécesseurs en calculs astronomiques⁴ consista à transformer les équations nécessaires pour la résolution des relations examinées dans la suite de cette monographie en une succession de relations de type (1).

2 ÉLÉMENTS THÉORIQUES

2.1 Généralités

Les étoiles fascinèrent l'humanité de tout temps; les méthodes et moyens imaginés pour les observer et qui forment l'astronomie sont ancestraux ; il en est de même de l'application de cette science à l'art de naviguer. L'histoire de l'astronomie bien que passionnante est toutefois hors du cadre de cette note et nous proposons au lecteur curieux quelques ouvrages classiques sur le sujet.

L'instrument étudié se situe à une date récente de cette évolution puisqu'il fut conçu vraisemblablement dans les années trente. La trigonométrie sphérique classique utilisée pour les calculs était donc arrivée à l'état d'achèvement que nous lui connaissons actuellement. Nous en reprenons donc les relations fondamentales ; leurs démonstrations figurent dans tous les cours concernant ce sujet.

L'ancienneté de cette science implique l'existence de traditions ou plus simplement d'habitudes dans les notations des grandeurs utilisées et pour les unités de mesures utilisées dans l'expression des valeurs de ces grandeurs ; rappelons en outre que ces usages varièrent dans le temps avec quelques divergences tenaces d'un pays à l'autre, surtout de chaque côté du Pas de Calais... pardon du *British Channel*.

Cela handicape la présentation de l'instrument. Nous préférons donc conserver dans le paragraphe suivant les notations classiques pour rappeler les propriétés d'un **triangle sphérique**, modèle mathématique du **triangle de position**. Oublions pour le moment l'utilité de ce triangle dans le monde réel des navigateurs : nous en reprendrons les usages en abordant l'étude du triangle de position.

2.2 Triangle sphérique

Ce paragraphe rappelle, avec des notations banales⁵ en géométrie et sans démonstration, les propriétés d'un triangle sphérique.

Soient une sphère de rayon 1 et trois points quelconques A , B et C sur cette sphère. On nomme triangle sphérique la figure formée par les trois arcs mineurs⁶ de grands cercles AB , BC et CA . Soient :

- $\widehat{a}$, $\widehat{b}$, $\widehat{c}$, les arcs formant les côtés du triangle respectivement opposés aux sommets A , B , C : les mesures de ces arcs égalent celles des angles des rayons les délimitant respectivement ;
- $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, les angles intérieurs du triangle, respectivement aux sommets A , B , C ; ces angles sont ceux des demi-dièdres formés des demi-plans diamétraux portant les arcs qui sont respectivement adjacents à chacun de ces sommets.

3 AC et BD représentés comme des segments de droites figure 4 sont en fait des arcs d'hélices.

4 La transformation des relations de la trigonométrie sphérique en relations calculables avec les logarithmes est une technique classique utilisant une variable auxiliaire figurée par la décomposition du triangle sphérique en deux triangles rectangles. Serret présente cette technique : viii, § 119, pp. 151 et suivantes.

5 Banales mais quelconques et évitant toute réminiscence du problème physique particulier introduit dans le paragraphe suivant.

6 C'est à dire le plus petit des deux arcs de grand cercle déterminé par chaque couple de points. Le cas d'égalité de ces deux arcs, inexistant en pratique, est ignoré dans cette monographie.

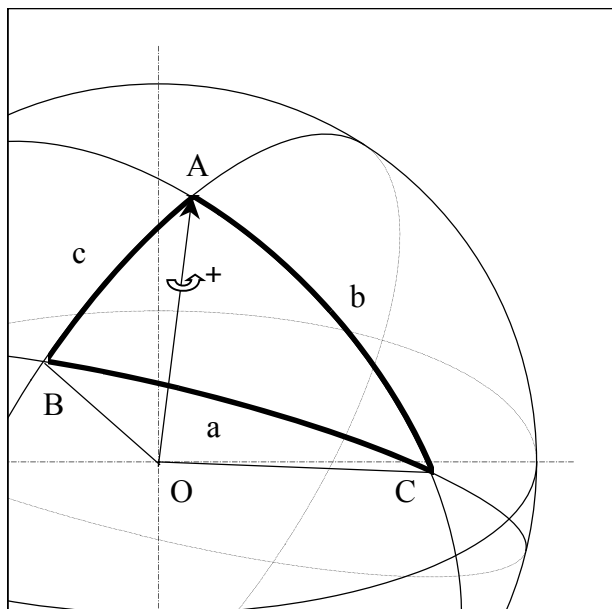
Les six grandeurs précitées sont mesurées en radians dans ce paragraphe ; leurs valeurs sont connues modulo 2π ; à chaque sommet, le rayon de la sphère orienté du centre de la sphère vers le point considéré permet de choisir un sens positif pour la mesure de l'angle à ce sommet et pour celle de l'arc opposé⁷.

Avec ces notations, les relations considérées classiquement comme fondamentales sont :

$$(3) \cos \hat{a} = \cos \hat{b} \cos \hat{c} + \sin \hat{b} \sin \hat{c} \cos \hat{A}$$

$$(4) \cos \hat{b} = \cos \hat{c} \cos \hat{a} + \sin \hat{c} \sin \hat{a} \cos \hat{B}$$

$$(5) \cos \hat{c} = \cos \hat{a} \cos \hat{b} + \sin \hat{a} \sin \hat{b} \cos \hat{C}$$



5 : Triangle sphérique.

Ces trois relations permettent de calculer les valeurs de trois des six grandeurs connaissant les valeurs des trois autres.

Ces relations sembleront vraisemblablement ésotériques à tout lecteur n'ayant aucun motif de s'intéresser à la géométrie dans l'espace et plus particulièrement à la trigonométrie sphérique⁸. Elles possèdent cependant deux qualités remarquablement extrêmes : leur démonstration et leur expression qui en résulte sont simples en dépit des apparences et tiennent en une figure et quelques courtes lignes⁹ ; par contre leur exploitation numérique fut, jusqu'à l'apparition des ordinateurs, le cauchemar récurant de tous ceux qui en avaient besoin professionnellement, particulièrement les astronomes, les cartographes et les navigateurs. Cela motiva de nombreuses recherches méthodologiques pour alléger ces travaux lourds et fastidieux ; l'instrument présenté résulta de cette quête de même que trois siècles plus tôt les logarithmes du baron Napier.

De ces relations résultent d'autres relations mieux adaptées aux besoins du calcul numérique. En particulier, pour l'objet de cette étude :

$$(6) \frac{\sin \hat{a}}{\sin \hat{A}} = \frac{\sin \hat{b}}{\sin \hat{B}} = \frac{\sin \hat{c}}{\sin \hat{C}}$$

$$(7) \cos \hat{A} = -\cos \hat{B} \cos \hat{C} + \sin \hat{B} \sin \hat{C} \cos \hat{a}$$

$$(8) \cotg \hat{a} \sin \hat{b} = \cos \hat{b} \cos \hat{C} + \sin \hat{C} \cotg \hat{A}$$

Les relations (7) et (8) privilégient l'angle $\hat{A}$ et l'arc $\hat{a}$; les mêmes relations existent toutefois en privilégiant $\hat{B}$, $\hat{b}$ ou $\hat{C}$, $\hat{c}$.

Remarquons que toutes les relations précédentes représentent des propriétés intrinsèques du triangle, c'est à dire indépendantes du choix d'un référentiel sur la sphère et de la position du triangle par rapport à ce référentiel. En trigonométrie pure ce choix est arbitraire ; en trigonométrie appliquée ce choix tient compte par commodité de caractéristiques physiques de l'objet représenté : l'équateur $\mathcal{E}$ et, conventionnellement, le méridien de Greenwich $\mathcal{G}$ pour le globe terrestre.

2.3 Triangle de position

À quelques variantes près, les notations réintroduites dans ce paragraphe sont fréquemment utilisées dans les manuels de navigation consultés pour cette monographie ; elles correspondent apparemment à un usage traditionnel plus qu'à une norme dûment établie.

7 Ce choix : dextrogire ou sinistrogire, est indifférent pour la suite ; cependant rappelons qu'il est préférable d'adopter la même convention pour chacun des sommets.

8 C'est effectivement une question de cours facile ; on peut toutefois l'ignorer ou l'avoir apprise puis oubliée ; dans ce cas, plutôt que de s'enervier à retrouver le fil conducteur de la démonstration consulter le classique : Serret, 1880, viii, pp. Pour les curieux qui fréquentèrent autrefois les classes de préparation aux Grandes Écoles, rappelons que la géométrie descriptive fut un excellent moyen de démonstration ; ainsi, pour chaque relation, une épure judicieusement construite apporte rapidement la réponse démonstrative ; il convient toutefois d'avoir conservé « la main ».

9 C'est tellement vrai que cette question semble toujours quasiment absente des oraux de concours fréquentés par des candidats bien entraînés : ce serait le cadeau d'une bonne note.

Présentation du triangle de position

Nous représentons le globe terrestre par une sphère de rayon R^{10} (fig. 6), les défauts de sphéricité étant considérés comme négligeables dans ce qui suit. Cette sphère est dotée d'un référentiel constitué de deux grands cercles orthogonaux : l'équateur $\mathcal{E}$ et le méridien de Greenwich $\mathcal{G}$. Tout point sur la sphère est déterminé par sa latitude nord ou sud et sa longitude¹¹ ouest ou est. L'usage de nommer les angles au lieu de les signer nécessite d'adapter les algorithmes de calcul aux différentes situations possibles sur le globe. Cette monographie n'étant pas un cours de navigation mais simplement la présentation d'un instrument, nous nous limiterons à un seul cas.

Le problème du navigateur, représenté par un point M sur cette sphère, est de connaître sa latitude et sa longitude. La hauteur du soleil lorsqu'il atteint son zénith donne rapidement la latitude. Le passage au zénith étant à midi en temps local du point M, l'écart avec l'heure indiquée par un chronomètre réglé sur l'heure de Greenwich donne la longitude. Indépendamment des questions de précision, l'inconvénient de ce procédé est qu'il n'est possible qu'une fois toutes les vingt-quatre heures.

On a donc cherché à le généraliser. Or la régularité des mouvements apparents des étoiles, simples ou complexes, sont des faits que n'importe quel observateur attentif peut constater depuis n'importe quel endroit sur terre. Par extrapolation d'observations patientes et répétées dans l'Antiquité ou par des calculs de mécanique céleste aujourd'hui, des tables prédisant les positions apparentes d'astres, à certains endroits et à certains instants, furent dressées et continuent de l'être pour de multiples raisons liées aux activités humaines. Ce sont les éphémérides astronomiques¹².

La mécanique céleste constitue de nos jours un bon modèle prédictif du mouvement des astres ; le navigateur dispose donc d'éphémérides astronomiques produites par des organismes officiels¹³ pour connaître la position apparente d'un astre à un instant donné. Ces éphémérides sont étroitement associés à l'usage de l'instrument étudié.

Le triangle de position est formé,

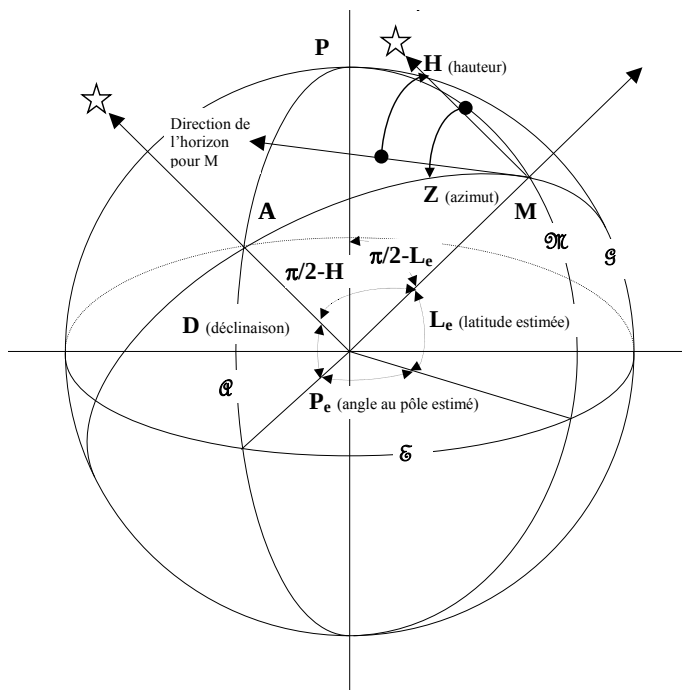
- de la position M de l'observateur,
- de P, l'un des deux pôles,
- de la projection A sur le globe terrestre d'un astre pris comme repère par une droite passant par le centre du globe.

Nous supposons ici que P est le pôle nord et que M et A sont situés tous deux dans le même hémisphère Nord, entre 0° et 90° ouest de Greenwich. Cette restriction pratique aux routes de l'Atlantique Nord allège l'étude de l'instrument en laissant de côté des discussions assez lourdes sur la manière de conduire les calculs.

Usage du triangle de position (fig. 7)

Le navigateur possédant une estimation M_e de sa position et disposant d'éphémérides, la méthode consiste à calculer la position de l'astre visé par rapport à M_e : son azimut Z_e et sa hauteur H_e . Ensuite, comparant la hauteur H_e à celle H_m mesurée avec le sextant, l'écart constaté permet au navigateur de corriger sa position estimée et d'en déduire sa position vraie M_v la plus probable (l'indice e rappelle que la valeur est estimée, c que la valeur est calculée, m que la valeur est mesurée).

Le navigateur disposait autrefois de trois instruments :



6 : Application au triangle de position sur un globe terrestre. La figure en perspective déforme l'orthogonalité en M de la verticale et de la direction de l'horizon. Cette orthogonalité existe toutefois et il en résulte que l'arc AM a pour mesure $\pi/2-H$.

10 Les défauts de sphéricité du globe terrestre plus proche d'un ellipsoïde que d'une sphère n'entraînent aucune conséquence pour cette monographie. La valeur moyenne du rayon est absente des relations trigonométriques présentées ; cette valeur n'intervient que pour transformer les mesures angulaires en mesures de longueurs.

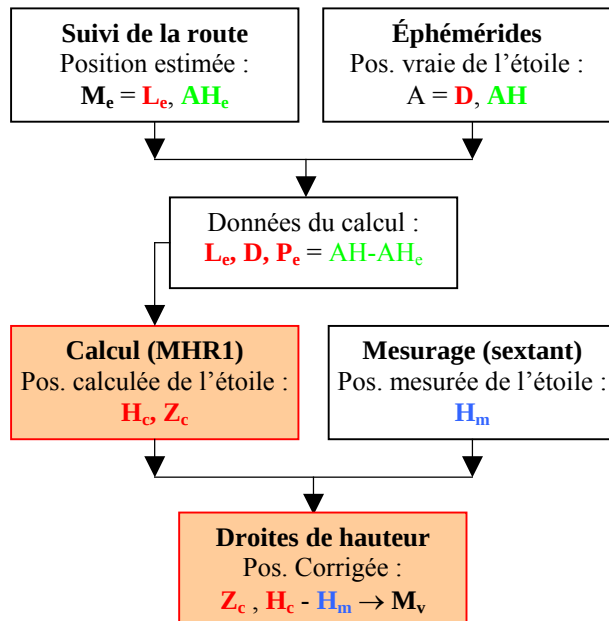
11 Choix n'offre aucune garantie de pérennité mais tout de même valable pour plusieurs générations à venir.

12 Nous parlerons des éphémérides astronomiques dans une monographies consacrées aux tables scientifiques et techniques.

13 En France, le Bureau des Longitudes.

- un chronomètre pour la connaissance du temps universel TU^{14} indispensable pour la consultation des éphémérides.
- à défaut d'instrument tel que celui décrit, une table de logarithmes,
- le plus souvent, un sextant¹⁵ pour les mesurages angulaires,

Le sextant impose un changement des grandeurs



7 : Place du calcul à l'aide du MHR1 dans la suite d'opération du point astronomique. Dans la procédure présentée, ces opérations sont effectuées pour trois étoiles permettant de tracer sur une carte trois droites de hauteur déterminant la position vraie M .

dans les équations du triangle sphérique. La mesure angulaire de chaque arc est celle de l'angle entre les verticales de ses extrémités. Or l'usage du sextant rend difficile sinon impossible le mesurage d'un tel angle ; en fait cet instrument permet le mesurage de la hauteur d'un astre sur l'horizon, complément à $\pi/2$ de l'angle qui précède. Pour cette raison certaines grandeurs angulaires seront remplacées par leurs compléments respectifs dans les relations effectivement utilisées.

Ensuite nous devons tenir compte d'une certaine diversité dans les unités de mesures utilisées par les astronomes et surtout les marins. Le radian est rarement utilisé en pratique maritime. Par contre le degré sexagésimal ou centésimal, le grade sont omniprésents dans les ouvrages de navigation, le choix de l'une ou l'autre de ces unités variant selon l'époque et le pays. L'heure et ses divisions sont également utilisées puisque la différence entre le temps local et le temps universel fixe la longitude sous la forme d'un angle dit horaire et noté AH.

De plus, les arcs, mesurés en unités angulaires doivent être rectifiés c'est à dire mesurés en unités de longueur : apparaissent alors le mile nautique mais aussi les unités métriques et celles anglo-saxonnes, etc.

Enfin il convient de s'accoutumer à des notations qui semblent traditionnelles tout en se trans-

forment en passant les frontières...

Ces précautions étant prises et en donnant la préférence aux notations les plus fréquentes dans les ouvrages français consultés, les données d'un point astronomique sont :

- la valeur TU du temps universel au moment de l'observation ;
- une estimation de la position M_e de l'observateur : la latitude L_e intervenant directement dans les calculs, la longitude estimée intervenant dans le calcul de l'angle au pôle P_e comme indiqué ci-après ;
- la position projetée exacte A de l'étoile observée à l'instant TU par l'utilisation des éphémérides : la déclinaison D (exprimée en degrés, minutes et secondes d'arc) et son angle horaire AH (exprimé en heures, minutes et secondes d'heure) rapporté au méridien de Greenwich ; l'angle au pôle estimé P_e est la différence entre AH et l'angle horaire de M , convertie en degrés, minutes et secondes d'arc ; c'est aussi l'angle des méridiens $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{M}$.

Le navigateur calcule alors la position de l'astre par rapport à sa propre position M_e : l'azimut Z_c et la hauteur H_c . H_c calculé est comparé à H_m mesuré avec le sextant ; répétant ces opérations pour trois étoiles, la position vraie M_v de l'estimation M_e résulte des trois comparaisons¹⁶.

Ces définitions et notations familières au monde maritime modifient les expressions des relations générales de la trigonométrie sphérique.

De la relation (4) nous déduisons successivement :

$$(9) \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - H_c\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - D\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - L_e\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - D\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - L_e\right) \cos P_e$$

$$(10) \quad \sin H_c = \sin L_e \sin D + \cos L_e \cos D \cos P_e$$

De la relation (3) nous déduisons enfin :

$$(11) \quad \cos Z_c = \frac{\sin D - \sin L_e \sin H_c}{\cos L_e \cos H_c}$$

14 Bien évidemment UT de l'autre côté de la Manche ; de la même manière AH devient HA.

15 Pour d'autres types de mesurages existent des cercles complets, des quadrants et même des octants.

16 Sur l'instrument d'origine allemande, les notations sont autres : Z est noté Az , D est noté δ , etc.

Les relations (10) et (11) sont devenues très usuelles avec l'emploi généralisé de l'informatique; leur programmation et leur calcul sont devenus courant avec les calculettes électroniques de poches. Remarquons toutefois que ce travail nécessite le calcul de quatre produits de fonctions trigonométriques et une division; si l'expression des formules est relativement simple, leur exécution manuelle est lourde.

3 MODE D'EMPLOI

3.1 Transformation des équations

L'instrument présenté apporte une solution pratique pour l'exécution de ces calculs fastidieux; il convient à cet effet de modifier les relations de manière à ce que les deux seules échelles logarithmiques gravées sur l'instrument à l'exclusion de toute autre puissent être utilisées de bout en bout du calcul. L'astuce pour l'usage de l'hélice à calcul consiste à fractionner le triangle APM en deux en abaissant l'arc AH¹⁷ perpendiculaire en H à l'arc PM. Nommons respectivement a_1 et a_2 les arcs PH et HM; les angles en H sont droits. Enfin l'introduction de deux variables intermédiaires x et y permet la transformation des relations du triangle de position, inexploitable avec MHR1, en relations du type (1). Ces dispositions étant prises, la relation (8) devient¹⁸:

$$(12) \cotg(\pi/2-D) \sin a_1 =$$

$$\cos a_1 \cos P_e + \sin P_e \cotg \pi/2$$

Posons $a_1 = \pi/2 - x$ ¹⁹; comme $\cotg \pi/2 = 0$, il vient:

$$(13) \tg D = \tg x \cos P_e$$

Considérons ensuite le triangle AHM; posons $a_2 = y - \pi/2$; la relation (8) devient:

$$(14) \tg H_c = -\tg y \cos Z_c$$

Selon les indications portées sur l'instrument y est obtus et $\tg y$ est négative; le document en français semble erroné sur ce point.

On démontre de même, m étant l'arc AH:

$$(15) \tg P_e \cos x = \tg m$$

$$(16) \tg Z_c \cos y = -\tg m$$

d'où

$$(17) \tg P_e \cos x = -\tg Z_c \cos y$$

3.2 Manipulation de l'instrument

L'instrument permet de calculer successivement x , Z_c , enfin H_c . Les instructions manuscrites, sont parfaitement explicites.

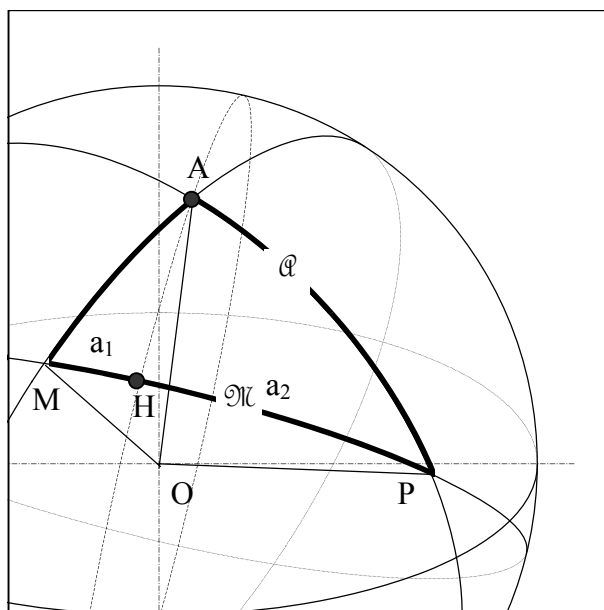
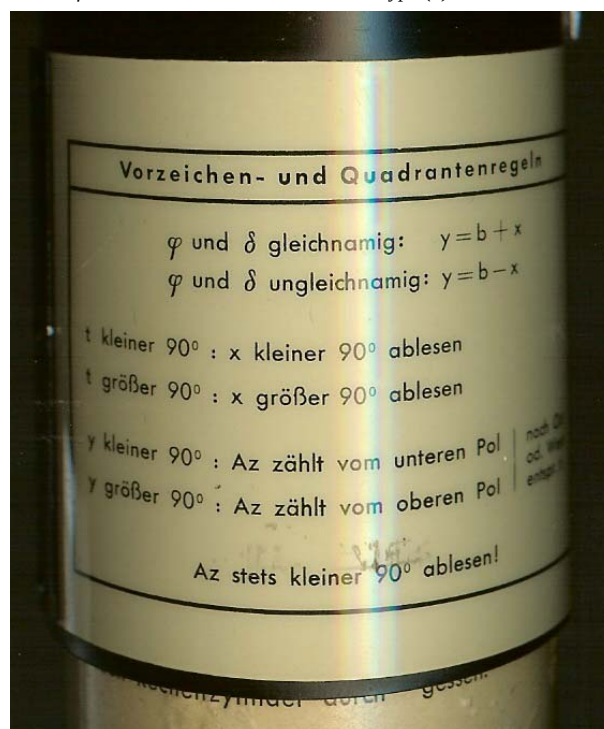


Figure 9 : Décomposition du triangle de position en deux triangles afin de transformer les relations en relations du type (1).



8 : Règles de calcul et de signe imposées par l'usage de MHR1.

17 Cette notation est celle du document accompagnant l'instrument; elle est inopportune, le groupe AH et la lettre H étant déjà utilisés à d'autres fins.

18 En omettant les indices c et e sans utilité désormais.

19 Ce changement de variable permet d'exprimer la relation destinée au calcul sous la forme (1) en transformant une cotangente en tangente. Bien noter que y est obtus dans ce cas étudié.

- **Calcul de x** : utilisation de la relation (13)

Preuve. Les paramètres A, B, C et D, angles de la relation (1) et points sur les échelles de la figure (4) deviennent 0° , D, P_e et x .

Comme précédemment les segments $0^\circ P_e$ et $x D$ sur les échelles sont égaux donc :

$$(18) \log \cos 0 - \log \cos P_e = \log \operatorname{tg} x - \log \operatorname{tg} D$$

Cette relation est la transformée logarithmique de la relation (13) ; les instructions de la figure 10 forment bien un algorithme pour calculer la variable intermédiaire x .

- **Calcul de Z_c** : utilisation de la relation (17)

Dans ces instructions, b est la colatitude²⁰ de M_e soit : $\pi/2 - L_e$.

Preuve. Les paramètres A, B, C et D de la relation (1) et de la figure (4) deviennent x , P_e , y et Z_c .

Comme précédemment les segments xy et $Z_c P_e$ sur les échelles sont égaux donc :

$$(19) \log \cos x - \log \cos y = \log \operatorname{tg} Z_c - \log \operatorname{tg} P_e$$

Cette relation est la transformée logarithmique de la relation (17) ; les instructions de la figure (11) forment bien un algorithme pour calculer Z_c .

- **Calcul de H_c** : utilisation de la relation (14)

Preuve. Les paramètres A, B, C et D de la relation (1) et de la figure (4) deviennent 0 , H_c , Z_c , et y .

Comme précédemment les segments $0 Z_c$ et $y H_c$ sur les échelles sont égaux donc :

$$(20) \log \cos Z_c - \log \cos 0 = \log \operatorname{tg} H_c - \log \operatorname{tg} y$$

Cette relation est la transformée logarithmique de la relation (14) ; les instructions de la figure (12) forment bien un algorithme pour calculer H_c .

3.3 Commentaires

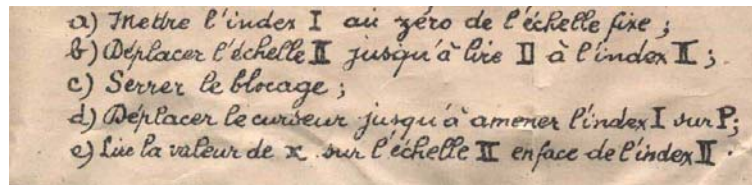
L'aspect sympathique des relations générales de la trigonométrie sphérique réside dans leur généralité : nous savons une fois pour toutes qu'elles sont vraies modulo 2π quels que soient les angles ; les usages nautiques dans la définition des différents paramètres nécessitent de considérer différents cas de figure selon les positions respectives des points A et M dans le référentiel (6, 9). Très hypocritement toute cette monographie suppose que A et M sont situés dans l'hémisphère nord avec des longitudes inférieures à 90° ouest. C'est évidemment restrictif et tout ce qui précède doit être adapté ensuite aux différentes autres situations possibles.

Cela sera l'objet d'une discussion ajoutée ultérieurement mais que nous pressentons laborieuse si nous lisons ce qu'il en est donné dans le fac-similé (17).

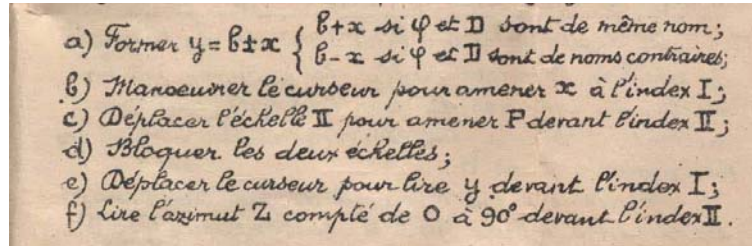
Enfin, il reste que dans une activité où s'entremêlent mesurages et calculs l'évaluation des erreurs est une question importante. Elle est momentanément omise dans cette version.

3.4 Triangle des droites de hauteur

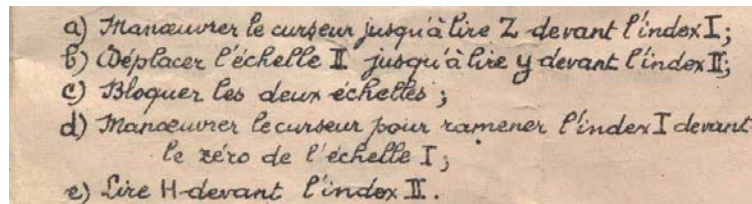
Le travail n'est pas encore terminé. Z_c et H_c ne sont en effet que la position de A, calculée par le navigateur par rapport à sa propre position estimée M_e ; sa position corrigée M_v reste inconnue. Il existe diverses



10 : 1er calcul : x .



11 : 2e calcul : Z_c .



12 : 3e calcul.

méthodes pour déterminer M_v ; nous résumons la plus générale : la détermination du triangle dit des droites de hauteur ; les autres méthodes n'en sont que des simplifications adaptées à des cas particuliers. La visée du soleil lorsqu'il traverse le méridien $\mathcal{M}$ est l'un de ces cas le plus usuel.

La valeur de H_c permet de situer M sur un lieu géométrique : celui des points depuis lesquels l'étoile visée est vue sous cet angle. C'est un cercle sur le globe terrestre ayant pour centre A . M_v est quelque part à proximité de ce cercle dans la direction Z_c depuis M_c . Sur la carte marine utilisée pour tracer la route, cet arc de cercle est assimilable à une droite perpendiculaire à la direction d'azimut Z_c . Cette droite, nommée droite de hauteur, est celle située à la distance déduite de $H_c - H_m$, H_m étant la valeur mesurée avec le sextant.

La méthode consiste alors à effectuer deux autres visées, les trois visées étant approximativement et de préférence si cela est possible, distantes angulairement de 120° . Le navigateur obtient ainsi deux nouvelles droites de hauteur qui ajoutées à la précédente forment un triangle. La position la plus probable de M_v est à l'intérieur de ce triangle. E. Lartigue (iv) expose cette méthode et ses variantes en détail ; son exposé montre sans détour les difficultés des calculs de navigation lesquels motivèrent certainement plus d'un Officier navigant à rechercher des solutions pratiques pour l'exécution de ces calculs.

Cette question sera réexaminée plus en détail ultérieurement car elle est commune à l'étude d'autres instruments de navigation attendant d'être étudiés.

4 CONCLUSION

Deux objections sont attendues : les trois listes d'instructions datant au plus tard de l'immédiat après guerre sont particulièrement difficiles à assimiler, il est nécessaire de manipuler l'instrument à trois reprises.

À l'encontre de la première objection, songeons qu'à cette époque les organigrammes et langages formels, familiers aujourd'hui, étaient pratiquement inconnus. Ajoutons que la connaissance qu'un officier de marine doit avoir de la trigonométrie sphérique et de la signification physique des paramètres traités facilite certainement la compréhension de ces instructions.

À l'encontre de la seconde objection nous devons bien admettre qu'une certaine dextérité doit résulter de l'usage, au minimum quotidien, de l'instrument ; la seule lecture de cette monographie, comme celle d'un cours de navigation est rebutante : seule la pratique des instruments en situation réelle permet de constater que, finalement, ce n'est pas si compliqué que cela en a l'air... Enfin si nous considérons le fac-similé, donné en exemple (fig. 13), d'une feuille consignait seulement les principales étapes de tels calculs exécutés manuellement, alors nous serons convaincus de l'amélioration apportée par cet instrument pour la navigation.

5 BIBLIOGRAPHIE

Les notices obtenues par la consultation du catalogue de la BN sont accompagnées de leur référence dans ce catalogue.

- i [Anonyme]. Notice d'utilisation concernant l'emploi de la règle allemande de Dennert et Pape (Hohen Rechen Schieber) système Bygrave, pour résoudre le Triangle de Position. 3ff. manuscrits [acquis avec l'instrument]. slnd.
- ii [Anonyme]. Règle allemande type MHR1 de Dennert et Pape (Hohen Rechen Schieber) système Bygrave. 1f. manuscrit [acquis avec l'instrument]. slnd.
- iii [Grosset-Grange (Henri)]. La science nautique arabe. in : Histoire des sciences arabes. 1 – Astronomie, théorique et appliquées. Sous la direction de Roshdi Rashed. Seuil, Paris, 1997. pp.233/260. ISBN 2-02-030352-3.
- iv Lartigue (E.). Nouveau calculateur nautique contenant des Tables et des Types de calcul pour effectuer rapidement tous les problèmes de la navigation par.... . Publié avec l'autorisation du Ministre de la Marine et des Colonies. Paris, Dunod, Éditeur, 1884. viii p., 223p.
- v Lubanski (Lt-Cl). Instruction pratique d'astronomie de campagne. Fascicule-annexe, planches et tables. Paris, Hachette, 1903. 17pl., 3 tables.
- vi Regiomontanus (Johannes). Ephemerides sive almanach perpetuus. Ephemerides solis et lune planetarumque perpetuus. Non paginé. FRBNF37267634.
- vii Stern-Veyrin (Olivier). Navigation en haute mer. Le point et les routes. Arhtaud, sl., 1976. 180p., tables. ISBN 2-7003-0126-9.
- viii Serret (Joseph Alfred). Traité de trigonométrie rectiligne et sphérique. Gauthier-Villars, Paris, 1880. x, 336P. Doc. num. FRBNF37263794.

Les documents i et ii sont communiqués en fac-similés légèrement réduits ci-après.

Imprimé N°2

Station de Sontay le 17^{Dec} 1899

Détermination de la latitude par la mesure des distances zénithales de la Polaire

Observateur: Commandant X

(1) Formules $\{ L = 90^\circ - A, \lambda = Z + S \cos A, (S \sin A)^{\frac{1}{2}} \sin 1' \cotg Z$

Chronomètre N° 1 de Brunner
Chronomètre N° 2 de Rodenot

Etat du Chronomètre N° 1 le 17^{Dec} 1899
à 0^h 00^m 00^s

(a) Différence en 24^h = 2^m 46^s
Marche = 10^m 38^s par minute

Longitude approchée du lieu = $6^\circ 52' 38''$
Ascension droite de la polaire = $1^\circ 23' 42''$
Déclinaison = $88^\circ 46' 50''$
Déclinaison δ = $1^\circ 43' 09''$
 δ convertie en secondes = $4389''$
Baromètre = 760.5
Thermomètre = 21.5

A. Détermination de l'heure moyenne du passage de la polaire au méridien du lieu

Temps sidéral le 17^{Dec} 1899 à midi moyen à Paris = $17^h 43^m 30^s$

Correction à appliquer: Variation de temps sidéral répondant à deux lieux dont on connaît l'écart de longitude approché = $-1^m 7^s 5$

El fin d'obtenir le:

Temps sidéral le 17^{Dec} 1899 à midi moyen du lieu (Sontay) = $17^h 42^m 53^s$

Ascension droite de la polaire (augmentée de 24 heures) = $25^h 23^m 42^s$

Intervalle sidéral écoulé entre midi moyen du lieu et le moment du passage de la polaire au méridien = $7^m 46^s 40$

Correction à appliquer pour convertir cet intervalle en temps moyen = $-1^m 3^s 40$

Temps moyen écoulé entre midi moyen du lieu et le passage de la polaire au méridien du lieu autrement dit:

Heure moyenne du passage de la polaire au méridien du lieu = $7^h 39^m 50^s$

B. Détermination des angles horaires A en temps sidéral

Heures du Chronomètre	$9^h 37^m 51^s 75$	$9^h 52^m 08^s 75$	$10^h 07^m 25^s 25$	$10^h 22^m 44^s 50$
États du Chronomètre	$-11^m 38^s 58$	$-11^m 39^s 17$	$-11^m 39^s 65$	$-11^m 40^s 10$
Heures des observations (en temps moyen)	$9^h 26^m 13^s 21$	$9^h 40^m 29^s 58$	$9^h 56^m 19^s 60$	$10^h 11^m 04^s 40$
Heures du passage de la polaire au méridien du lieu (en temps moyen)	$7^h 39^m 50^s 93$	$7^h 39^m 50^s 93$	$7^h 39^m 50^s 93$	$7^h 39^m 50^s 93$
Angles horaires (en temps moyen)	$1^h 46^m 22^s 28$	$2^h 00^m 38^s 65$	$2^h 16^m 48^s 67$	$2^h 31^m 53^s 47$
Conversion en temps sidéral - Correction	$+0^m 17^s 32$	$+0^m 19^s 87$	$+0^m 22^s 47$	$+0^m 24^s 89$
Angles horaires (en temps sidéral)	$1^h 46^m 39^s 60$	$2^h 01^m 58^s 52$	$2^h 17^m 11^s 14$	$2^h 31^m 58^s 36$

C. Détermination des 1^{ers} Termes $\delta \cos A$

Distances zénithales apparentes (en degrés)	$75^\circ 26' 55''$	$75^\circ 50' 57''$	$75^\circ 58' 66''$	$75^\circ 40' 87''$
δ (en degrés)	$67^\circ 44' 23''$	$67^\circ 46' 36''$	$67^\circ 49' 15''$	$67^\circ 52' 04''$
Correction de réfraction	$-2' 15''$	$-2' 16''$	$-2' 16''$	$-2' 16''$
Valeurs du 1 ^{er} terme	$67^\circ 46' 39''$	$67^\circ 46' 52''$	$67^\circ 51' 31''$	$67^\circ 54' 20''$

D. Détermination des 2^{es} Termes $\delta \cos A$

Angles horaires vrais en degrés	$20^\circ 44' 57''$	$30^\circ 19' 37''$	$34^\circ 17' 47''$	$37^\circ 59' 35''$
Logarithme δ (S exprimé en secondes)	$3,6424348$	$3,6424348$	$3,6424348$	$3,6424348$
Logarithmes des Cos A	$7,9360896$	$7,9360896$	$7,9170503$	$7,8963726$
Logarithmes des Deuxièmes termes	$3,5785242$	$3,5785242$	$3,5594851$	$3,5390074$
Valeurs des Deuxièmes termes	$1^\circ 3' 19''$	$1^\circ 3' 8''$	$1^\circ 0' 26''$	$0^\circ 57' 39''$

E. Détermination des 3^{es} Termes $(\delta \sin A)^{\frac{1}{2}} \sin 1' \cotg Z$

Logarithmes δ	$3,6424348$	$3,6424348$	$3,6424348$	$3,6424348$
Logarithmes $\sin A$	$7,6533950$	$7,7032372$	$7,7508742$	$7,7892757$
Logarithmes $(\delta \sin A)$	$3,2958298$	$3,3456720$	$3,3933090$	$3,4317105$
Logarithmes $(\delta \sin A)^{\frac{1}{2}}$	$6,5916596$	$6,5913440$	$6,5966180$	$6,5863210$
$\log 1' \sin 1'$	$8,3845449$	$8,3845449$	$8,3845449$	$8,3845449$
Logarithmes $\cotg Z$	$7,6112441$	$7,6104415$	$7,6094850$	$7,6084626$
Logarithmes des 3 ^{es} termes	$0,5874436$	$0,5863304$	$0,5780679$	$0,5564285$
3 ^{es} termes	$3' 87$	$4' 86$	$6' 03$	$7' 19$

F. Application des deux formules - (1)

Premiers termes Z	$67^\circ 46' 39''$	$67^\circ 48' 52''$	$67^\circ 51' 31''$	$67^\circ 54' 20''$
Deuxièmes termes + $(\delta \cos A)$	$+1^\circ 3' 19''$	$+1^\circ 3' 8''$	$+1^\circ 0' 26''$	$+0^\circ 57' 39''$
Somme	$68^\circ 51' 59''$	$68^\circ 52' 01''$	$68^\circ 51' 57''$	$68^\circ 52' 00''$
Troisièmes termes $(\delta \sin A)^{\frac{1}{2}} \sin 1' \cotg Z$	$3' 87$	$4' 86$	$6' 03$	$7' 19$
Valeurs de la Co-latitude λ	$68^\circ 51' 53''$	$68^\circ 51' 56''$	$68^\circ 51' 51''$	$68^\circ 51' 53''$
Valeurs de la Latitude L	$21^\circ 08' 06''$	$21^\circ 08' 03''$	$21^\circ 08' 08''$	$21^\circ 08' 07''$

Latitude moyenne = $21^\circ 08' 05''$

A Sontay, le 18 Décembre 1899

Signé: X

RÈGLE ALLEMANDE
 Type MHR 1
 de DENNERT et PAPE
 (Hohen Rechen Schieber)
 système Bygrave

Utilisée pour résoudre le triangle de position en navigation à partir de l'observation au sextant du soleil ou d'étoiles. Elle a été employée, notamment pendant la II^e guerre mondiale par les officiers de navigation des unités de la Kriegsmarine et de la marine marchande allemande (calculs d'azimut) et aussi en navigation aérienne (droites de hauteur). Le Service Hydrographique de la Marine Nationale française avait fait l'acquisition d'un très petit nombre de ces règles de fabrication allemande.

Notice d'utilisation concernant l'emploi de la règle allemande de Dennert et Pape (Hohen Rechen Schieber) système Bygrave, pour résoudre le Triangle de Position

Description

L'Instrument se compose de deux échelles logarithmiques en spirale tracées sur deux cylindres concentriques coulissant l'un dans l'autre.

Un étui concentrique formant curseur mobile porte deux index I et II permettant de lire directement la valeur des angles en degrés sur chaque échelle.

Formule résolue par la règle

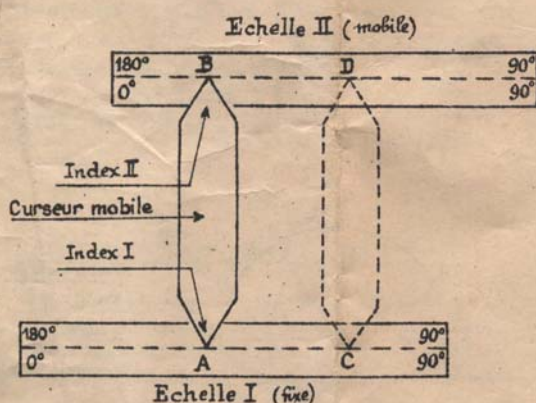
Si A et B, ou C et D, sont deux groupes d'arc comptés de 0 à 180°, la règle permet de calculer les produits suivants :

$$\cos A \cdot \lg B = \cos C \cdot \lg D$$

Disposition et manœuvre des échelles

L'Echelle I est une échelle fixe de logs cosinus graduée de 0 à 90° et de 180° à 90°.

L'Echelle II est une échelle mobile de logs tangente graduée de 0 à 90° et de 180° à 90°.



Les deux échelles peuvent être rendues solidaires l'une de l'autre par un système de blocage placé à la partie supérieure de l'instrument.

Les deux index sont placés sur le curseur à une distance invariable l'un de l'autre.

Les opérations sont les suivantes :

- Le curseur est déplacé pour lire A devant l'index I ;
- L'échelle I est déplacée pour lire B devant l'index II ;
- A ce moment, les échelles sont rendues solidaires l'une de l'autre ;
- Le curseur est déplacé pour lire C devant l'index I ;
- On lit alors D à l'index II.

Remarque. La formule type ne comporte

que des cosinus ou des tangentes dont le signe change avec la nature aiguë ou obtuse de l'angle, mais la résolution par la règle ne portant que sur les valeurs absolues des lignes trigonométriques, les échelles indiquent à la fois des éléments aigus et leur supplément.

Application au triangle de position

La décomposition bien connue du triangle de position fait apparaître des groupes de formules du type résolu par la règle, qui permettent d'obtenir successivement les coordonnées horizontales Z et H.

Les éléments du triangle de position sont :
La distance polaire $90 \pm \varphi$ suivant que φ et ϑ sont de noms contraires ou de même nom ;

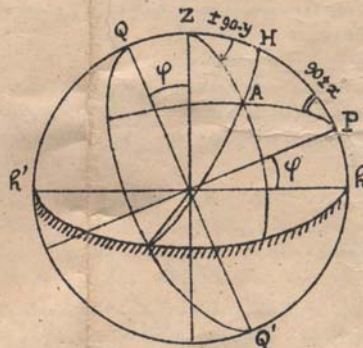
La colatitute $\delta = 90 - \varphi$ aiguë ;

P l'angle au pôle, compté de 0 à 180° dans l'Est ou dans l'Ouest. On sait que :

si l'astre est à l'Est : $P = 24 - A$

si l'astre est à l'Ouest : $P = A$

Z l'azimut, compté dans le triangle de 0 à 180° dans l'Est ou dans l'Ouest, à partir du pôle élevé.



La règle n'utilise et ne fournit que des éléments positifs, et de plus, ne fournit l'azimut qu'en le comptant par quadrants de 0 à 90°, soit du pôle élevé, soit du pôle abaissé.

La décomposition en triangles rectangles se fait en abaissant de l'astre A la perpendiculaire sphérique AH sur le méridien. On pose alors :

$$\widehat{PH} = 90 \pm x$$

$$\widehat{ZH} = \pm (90 - y)$$

de façon à respecter les conventions de signe simples finales et à obtenir :

$$y = \delta \pm x$$

1^{ère} Operation

Elle résout la formule (1) :

$$\lg(90 \pm \Pi) \cos P = \lg(90 \pm x) \quad (1)$$

- Mettre l'index I au zéro de l'échelle fixe ;
- Déplacer l'échelle II jusqu'à lire Π à l'index I ;
- Serrer le blocage ;
- Déplacer le curseur jusqu'à amener l'index I sur P ;
- Lire la valeur de x sur l'échelle II en face de l'index I.

2^e Operation

Elle résout les deux formules identiques (3) et (4)

$$\lg AH = \sin(90 \pm x) \lg P = \pm \cos x \lg P \quad (3)$$

$$\lg AH = \pm \sin(90 - y) \lg Z = \pm \cos y \lg Z \quad (4)$$

- Former $y = b \pm x$ $\begin{cases} b+x & \text{si } \varphi \text{ et } \Pi \text{ sont de même nom;} \\ b-x & \text{si } \varphi \text{ et } \Pi \text{ sont de noms contraires;} \end{cases}$
- Manœuvrer le curseur pour amener x à l'index I ;
- Déplacer l'échelle II pour amener P devant l'index I ;
- Bloquer les deux échelles ;
- Déplacer le curseur pour lire y devant l'index I ;
- Lire l'azimut Z compté de 0 à 90° devant l'index II.

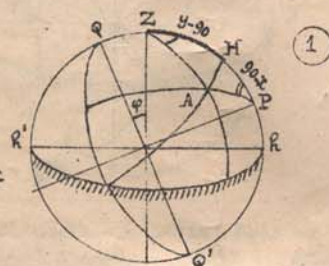
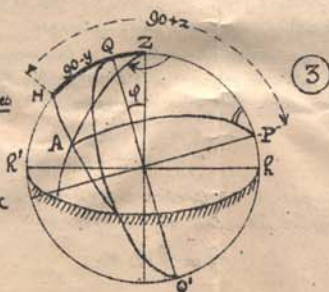
3^e Operation

Elle résout la formule (5) :

$$\lg(90 - H) = \frac{\pm \lg(90 - y)}{\cos Z} \text{ ou : } \lg H = \pm \lg y \cos Z \quad (5)$$

- Manœuvrer le curseur jusqu'à lire Z devant l'index I ;
- Déplacer l'échelle II jusqu'à lire y devant l'index II ;
- Bloquer les deux échelles ;
- Manœuvrer le curseur pour ramener l'index I devant le zéro de l'échelle I ;
- Lire H devant l'index II.

Remarque — On notera que pour obtenir H , il faut au préalable, calculer Z . Ces opérations sont très bien schématisées par un graphique en Z porté par la règle.

 φ et Π même nom $P < 6^H$ x aigu y aigu $= b+x$  φ et Π de noms contraires $P < 6^H$ x aigu y obtus $= b-x$ Règles de signe

Ces règles sont résumées par un tableau figurant à la base du curseur :

- φ et Π de même nom : $y = b+x$
 φ et Π de noms contraires : $y = b-x$
- $P < 90^\circ$ ou 6^H : $x < 90^\circ$
 $P > 90^\circ$ ou 6^H : $x > 90^\circ$ (x du genre de P)

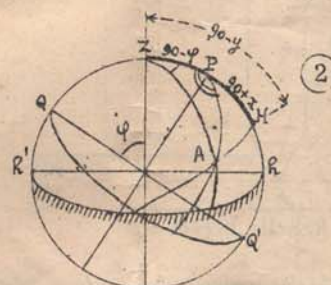
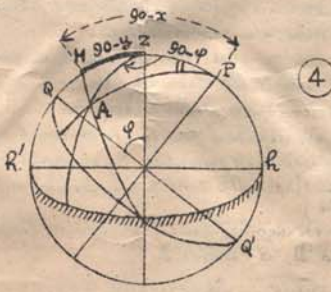
- y aigu : Z compté du pôle élevé de 0 à 90°
 y obtus : Z compté du pôle abaissé de 0 à 90° vers l'E. ou l'O.

Justification — Ces règles sont déterminées par les trois conditions suivantes :

- Elles sont conformes aux obligations algébriques des formules des triangles.
- Elles résultent du fait que la règle ne traite que des lignes trigonométriques positives relative à des arcs positifs et aigus.
- Elles sont imposées par le choix du système de mesure de l'azimut en quadrants.

Elles se vérifient simplement en considérant que pour un astre observable ($H > 0$), les différents cas de figure peuvent se ramener à trois :

- φ et Π de même nom
 $\left. \begin{array}{l} \text{fig. (1) } P < 6^H \\ \text{fig. (2) } P > 6^H \end{array} \right\} \begin{array}{l} x \text{ aigu ; } Z \text{ compté du pôle élevé} \\ y \text{ aigu} = b+x \\ ZH = y-90^\circ ; PH = 90-x \end{array}$
- φ et Π de noms contraires
 $\text{fig. (3) } P < 6^H \left\{ \begin{array}{l} x \text{ aigu ; } Z \text{ compté du pôle abaissé} \\ y \text{ obtus} = b-x \\ ZH = 90-y ; PH = 90+x \end{array} \right.$

 φ et Π même nom $P > 6^H$ x obtus y aigu $= b+x$  φ et Π même nom $P < 6^H$ x aigu y obtus $= b+x$

Sur les figures ①, ②, ③, on peut vérifier successivement l'équilibre des formules et l'exactitude des règles de signe.

La 2^e règle de signe : x du genre de P , est immédiate sur la formule (1)

$$\operatorname{tg}(90 \pm D) \cos P = \operatorname{tg}(90 \pm x) \quad (1)$$

$$\text{ou: } \pm \operatorname{tg} x \cos P = \pm \operatorname{tg} D \quad (2)$$

D étant pris en valeur absolue, $\operatorname{tg} x$ a le signe de $\cos P$.

Elle se retrouve sur formule (3) :

$$\operatorname{tg} \widehat{AH} = \pm \cos x \operatorname{tg} P \quad (3)$$

$\operatorname{tg} \widehat{AH}$ étant un élément toujours positif

La 2^e règle de signe relative au nom de Z , se lit sur la formule (4) :

$$\operatorname{tg} \widehat{AH} = \pm \cos y \operatorname{tg} Z \quad \begin{cases} \cos y > 0 & \operatorname{tg} Z > 0 \\ \cos y < 0 & \operatorname{tg} Z < 0 \end{cases} \quad (4)$$

Si y est aigu (φ et D de même nom) Z est compté du pôle élevé.

Si y est obtus (φ et D de même nom, ou de noms contraires et $P < 6^\circ$) Z est compté du pôle abaissé.

La formule (5) reproduit les mêmes résultats :

$$\operatorname{tg} H = \pm \operatorname{tg} y \cos Z \quad (5)$$

La 1^{re} règle de signe $y = 6 \pm \varphi$ se vérifie directement sur chaque figure en évaluant la somme algébrique $PZ = PH + HZ$.

On peut également considérer un quatrième cas de figure vérifiant ces règles, relatif au cas φ et D de même nom, $P < 6^\circ$, l'astre ayant franchi le 1^{er} vertical, et l'azimut compté par quadrants du pôle abaissé. Il rentre dans le cas (a) [voir figure ④]

Approximation de la règle

Cas particulier - Dans le voisinage du passage de l'astre au premier vertical ou au relevement Ouest, la règle n'est également plus utilisable pour donner l'azimut, la formule (4)

$$\operatorname{tg} \widehat{AH} = \pm \cos y \operatorname{tg} Z \quad (4)$$

ne donnant plus de valeurs définies pour $\widehat{AH}$.

En signalant ce cas particulier dans la notice allemande portée par la règle, il est indiqué que l'on peut poursuivre malgré tout le calcul de H en permutant les valeurs de φ et de D , c'est-à-dire, en formant :

$$y = (90 - D) \pm x$$

Cet artifice revient à décomposer le triangle de position en deux triangles

rectangles ayant Z pour sommet commun et séparés par une perpendiculaire sphérique abaissée de Z sur le méridien de l'astre. Les formules sont alors semblables en permutant D et φ . L'élément obtenu à la fin de la 2^e opération n'est alors plus l'azimut, mais l'angle à l'astre A , qui n'a pas d'autre utilité que celle d'angle auxiliaire pour le calcul de H .

Il est visible que l'échelle I qui est une échelle de logs cosinus, n'est pas utilisable à la minute d'arc pour le calcul de x et Z et la mise en place de P jusqu'à environ de 50° ou 130° . Elle donne, par contre, le $\frac{1}{10}$ de degré à partir de 20° .

L'échelle II des logs tangente, est utilisable à la minute d'arc sur toute sa longueur.

La règle est inutilisable pour des angles au pôle et des déclinaisons compris entre 0° et $0^\circ 30'$, ainsi que pour des angles au pôle voisins de 90° .

Conclusion

Utilité de la règle

Malgré ces restrictions, la règle est d'un emploi commode et rapide pour un utilisateur entraîné, pour la mesure de l'azimut d'un astre au $\frac{1}{10}$ de degré. En ce qui concerne la hauteur, ce n'est que dans certains cas privilégiés qu'elle peut donner la minute d'arc.

Dans les autres cas, elle donnera le $\frac{1}{10}$ de degré, et peut, par conséquent, être utilisée couramment en navigation aérienne ou pour dégrossir une observation.

Du fait de la généralité des formules qu'elle résout, elle peut être utilisée également pour l'identification d'un astre et la résolution approchée des problèmes d'orthodromie.

Elle constitue, en tous cas, un excellent moyen de contrôle de la variation.

