ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

№. 218.

Neue Berechnungsart für die nautische Methode der Mondes-Distanzen.

Von Herrn Professor und Ritter *Bessel*.

Die Methode den unbekannten Mittagsunterschied eines Ortes, durch Beobachtung der Entfernung des Mondes von der Sonne, einem Planeten, oder einem Fixsterne zu bestimmen, ist bekanntlich für die Schiffahrt so wichtig geworden, dafs die Regierungen der seefahrenden Völker die Astronomen häufig veranlafst haben, ihre Vervollkommnung mit Anstrengung zu suchen. Sie haben es aber nicht bei Aufforderungen bewenden lassen, sondern auch, durch die Einrichtung und Unterhaltung von Sternwarten, der Astronomie so reichliche Hülfsmittel gewährt, dafs die Arbeiten von welchen die gewünschten Vervollkommnungen ausgehen mufsten, mit Erfolg unternommen werden konnten. Es ist nicht meine Absicht, hier den grofsen Nutzen geschichtlich zu entwickeln, welcher beiden Theilen aus dieser berühmten Aufgabe erwachsen ist; allein ehe ich mittheile was ich selbst dazu beizutragen habe, mufs ich, durch die Darstellung des jetzigen Zustandes derselben, zu zeigen suchen, welche Lücke noch auszufüllen ist.

Der schwierigste Theil der Aufgabe, die Vervollkommnung der Mondstheorie, ist durch die Bemühungen der Geometer, der beobachtenden Astronomen und Derer die darauf ausgingen hieraus den beabsichtigten Nutzen zu ziehen, mit solchem Glücke behandelt worden, dafs die Tafeln von *Bürg*, und noch mehr die späteren von *Burckhardt* und von *Damoiseau* für den nautischen Zweck nichts mehr zu wünschen übrig lassen. Die Sonnentheorie ist gleichfalls der Wahrheit so nahe gebracht, dafs die Vergleichung von zehn Jahrgängen von Beobachtungen mit den, in den Astr. Nachr. Nr. 133-134 erschienenen Tafeln, wovon ein Theil in derselben Zeitschrift abgedruckt worden ist, keinen entschiedenen Fehler mehr gezeigt hat. Die Theorien der jetzt auch, von *Schumacher* *) in die Praxis der nautischen Methode eingeführten Planeten lassen zwar mehr zu wünschen übrig, jedoch stimmen die Tafeln der Venus und des Mars von *Lindenau*, und des Jupiters und Saturns von *Bouvard* schon so nahe mit dem Himmel überein, dafs man eine wirklich nachtheilig werdende Unsicherheit der Resultate von ihren Abweichungen nicht erwartet. Die Oerter und die Bewegungen derjenigen Fixsterne, deren Entfernungen vom Monde die Ephemeriden anzugeben pflegen, sind endlich, aus den Untersuchungen älterer und neuerer Beobachtungen, so genau bekannt geworden, dafs man sie für jede astronomische Anwendung, geschweige denn für die nautische, für genügend erachtet.

Der zweite Theil der Auflösung der Aufgabe, nämlich die Beobachtung der Entfernungen des Mondes, ist durch Vervollkommnung der Reflexionsinstrumente so weit gebracht, dafs die auf einem beweglichen Schiffe erreichbare Grenze von Genauigkeit wirklich erreicht werden zu können, und dann gegen die Grenze der Sicherheit, mit welcher auf die, der Berechnung zum Grunde zu legenden Oerter der Gestirne gezählt werden kann, nicht so sehr zurück zu bleiben scheint, als man bei der nothwendigen Kleinheit der Reflexionsinstrumente erwarten sollte.

Der dritte Theil der Auflösung ist dagegen noch nicht so vollendet, dafs nicht noch Grund vorhanden sein sollte etwas zu wünschen: die Berechnungsart der Beobachtungen besitzt wirklich noch mehrere Unvollkommenheiten. Es hat zwar weder an Aufforderungen noch an Bemühungen gefehlt, auch diesen Theil der Auflösung zu erleichtern und sicher zu machen, und man besitzt, in Folge derselben, wirklich vielfältige Vorschriften und Hülfsmittel, welche von den Seefahrern mit Leichtigkeit angewandt werden; allein es ist dadurch noch nicht so weit gebracht worden, dafs Leichtigkeit der Anwendung und Sicherheit des Resultats vereinigt wären.

Die vorgeschlagenen Arten die Abplattung der Erde in Rechnung zu bringen, sind noch nicht so geschmeidig, dafs sie in allgemeine Anwendung gekommen wären, obgleich die

*) Soviel ich weifs, gehört die erste Idee, Distanzen der Planeten für die Längenbestimmung zu gebrauchen, meinem verewigten Freunde *v. Lövenörn*. Ehe meine Ephemeriden herauskamen, hatte auch schon Herr *Inghirami* Planetendistanzen vom Monde in Herrn *v. Zachs* Correspondance Astronomique gegeben. S.

Voraussetzung der Kugelgestalt der Erde einen mehr als 15″ betragenden Fehler der auf ihren Mittelpunkt reducirten Distanz erzeugen kann. — Ferner wird die Befreiung der beobachteten Distanz von der Strahlenbrechung dadurch fehlerhaft, dafs die Strahlenbrechungen für die Mittelpunkte der Gestirne berechnet werden, während sie für diejenigen Punkte ihrer Ränder berechnet werden sollten, zwischen welchen man die Entfernung gemessen hat. Dieser Fehler erlangt seinen gröfsten Einflufs wenn Mond und Sonne in Einem Verticalkreise, auf derselben Seite des Scheitelpunktes stehen und die Entfernung der nächsten Ränder gemessen worden ist, denn dann ist derselbe der Summe der Veränderungen der Strahlenbrechung vom Mittelpunkte bis zum Rande jedes der beiden Gestirne gleich; er beträgt, wenn eins derselben resp. 20°, 15°, 10°, 5° über dem Horizonte, das andere beträchtlich höher steht, etwa 3″, 5″, 9″, 27″; und selbst dem letzten, gröfsten Fehler wird man wirklich ausgesetzt sein, indem es nicht rathsam sein würde, einen gröfseren Theil der sichtbaren Hälfte der Himmelskugel, als nothwendig geschehen mufs, der Anwendung der Mondsmethode zu entziehen. Die Grenze dieses Theils wird durch diejenigen Störungen der Strahlenbrechung bestimmt, welche durch die Nähe des Horizonts erzeugt, aber durch die meteorologischen Instrumente nicht erkannt werden; dafs diese selbst in der Zenithdistanz von 85° noch nicht so beträchtlich sind, dafs sie nöthigten, die Gränze höher hinauf zu verlegen, habe ich durch Beobachtungen gezeigt *).

Zu diesen, der Rechnungsmethode angehörigen Fehlern gesellen sich noch andere, welche nicht sowohl aus der Methode, als aus der üblichen Art dieselbe anzuwenden entstehen. Man wendet nämlich immer nur mittlere Werthe der Strahlenbrechung an, vernachlässigt daher die Veränderungen welche sie mit den Ständen des Barometers und Thermometers erleidet. Wenn man den ersten einen englischen Zoll, den zweiten 40° Fahr. von dem Stande welchen die Tafel voraussetzt verschieden annimmt, so sind die dadurch entstehenden Veränderungen der Strahlenbrechung für verschiedene Zenithdistanzen:

Z. D.	Barom.	Therm.	Summe.
40°	1″6	3″8	5″4
50	2,0	4,6	6,6
60	3,4	7,8	11,2
70	5,3	12,4	17,7
75	7,1	16,8	23,9
80	10,6	25,4	36,0
85	19,3	48,5	67,8

Die Beträchtlichkeit dieser Veränderungen scheint zu fordern, dafs man dem Seefahrer entweder die Anwendung der meteorologischen Instrumente zur Pflicht mache, oder ihm die Fälle in welchen der Einflufs ihrer Angaben auf das Resultat, beträchtlich werden kann, als unsicher darstelle; welches letztere man jedoch, um die Anwendung der Methode nicht zu beschränken, gern vermeiden wird. Indessen steht auch der Benutzung des Barometers und Thermometers ein nicht unbeträchtliches Hindernis im Wege: die üblichen Berechnungsarten beruhen nämlich auf Tafeln, welche die Horizontalparallaxe des Mondes und seine scheinbare Höhe zu Argumenten haben und entweder den Unterschied der Höhenparallaxe und Strahlenbrechung, oder einen hiervon abhängigen Logarithmen *) angeben, deren Entbehrung dem Seefahrer gröfsere Arbeit verursachen würde als man ihm zuzumuthen geneigt ist, deren Anwendung aber mit der Verbesserung des Fehlers unverträglich ist, indem sie nur unter der Voraussetzung eines mittleren Werthes der Strahlenbrechung berechnet sein können. Diese Tafeln sind nicht etwa ausschiefslich für gröfsere Höhen der Gestirne, wo der aus der Vernachlässigung der meteorologischen Instrumente entstehende Fehler weniger gefährlich wird, bestimmt, sondern sie gehen bis auf Höhen von 3° herab.

Endlich sollte, meines Erachtens, die Auflösung der Aufgabe so eingerichtet werden, dafs das Messen der Höhen der Gestirne vermieden und die Beobachtung auf die Messung der Entfernung allein beschränkt würde. Denn durch die scheinbare Entfernung zu gegebener Zeit des Beobachtungsortes, durch die Polhöhe desselben und durch die in den Ephemeriden enthaltenen Oerter der Gestirne ist die Aufgabe völlig bestimmt, und wenn man noch anderes, in die Rechnung eingehendes aus Beobachtungen ableitet, so ist der Erfolg davon, dafs die Fehler dieser Beobachtungen das Resultat der Distanzmessung mehr oder weniger entstellen. Dieser Nachtheil würde indessen für die Anwendung wenig bedeuten, wenn man die Höhen der Gestirne immer mit einiger Genauigkeit messen könnte; aber dieses ist nicht der Fall, denn oft ist die Undeutlichkeit des Meereshorizonts so störend, oder die unregelmäfsige Einwirkung der Strahlenbrechung auf denselben so grofs, dafs das Messen der Höhen nur eine rohe Annäherung gewähren kann. In vielen Fällen ist der Horizont ganz unsichtbar, wodurch das Messen der Höhen wegfällt und die Berechnung derselben nothwendig wird. Könnte man die aus der

*) Astr. Beobb. auf der Sternwarte in Königsberg. VII Abthl. S. XXVII.

*) Logarithmic Difference, nach der Benennung der Englischen Navigationsbücher.

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

№ 218.

Neue Berechnungsart für die nautische Methode der Mondes-Distanzen.

Von Herrn Professor und Ritter *Bessel.*

Die Methode den unbekannten Mittagsunterschied eines Ortes, durch Beobachtung der Entfernung des Mondes von der Sonne, einem Planeten, oder einem Fixsterne zu bestimmen, ist bekanntlich für die Schiffahrt so wichtig geworden, dafs die Regierungen der seefahrenden Völker die Astronomen häufig veranlafst haben, ihre Vervollkommnung mit Anstrengung zu suchen. Sie haben es aber nicht bei Aufforderungen bewenden lassen, sondern auch, durch die Einrichtung und Unterhaltung von Sternwarten, der Astronomie so reichliche Hülfsmittel gewährt, dafs die Arbeiten von welchen die gewünschten Vervollkommnungen ausgehen mufsten, mit Erfolg unternommen werden konnten. Es ist nicht meine Absicht, hier den grofsen Nutzen geschichtlich zu entwickeln, welcher beiden Theilen aus dieser berühmten Aufgabe erwachsen ist; allein ehe ich mittheile was ich selbst dazu beizutragen habe, mufs ich, durch die Darstellung des jetzigen Zustandes derselben, zu zeigen suchen, welche Lücke noch auszufüllen ist.

Der schwierigste Theil der Aufgabe, die Vervollkommnung der Mondstheorie, ist durch die Bemühungen der Geometer, der beobachtenden Astronomen und Derer die darauf ausgingen hieraus den beabsichtigten Nutzen zu ziehen, mit solchem Glücke behandelt worden, dafs die Tafeln von *Bürg*, und noch mehr die späteren von *Burckhardt* und von *Damoiseau* für den nautischen Zweck nichts mehr zu wünschen übrig lassen. Die Sonnentheorie ist gleichfalls der Wahrheit so nahe gebracht, dafs die Vergleichung von zehn Jahrgängen von Beobachtungen mit den, in den Astr. Nachr. Nr. 133-134 erschienenen Tafeln, wovon ein Theil in derselben Zeitschrift abgedruckt worden ist, keinen entschiedenen Fehler mehr gezeigt hat. Die Theorien der jetzt auch, von *Schumacher* *) in die Praxis der nautischen Methode eingeführten Planeten lassen zwar mehr zu wünschen übrig, jedoch stimmen die Tafeln der Venus und des Mars von *Lindenau*, und des Jupiters und Saturns von *Bouvard* schon so nahe mit dem Himmel überein, dafs man eine wirklich nachtheilig werdende Unsicherheit der Resultate von ihren Abweichungen nicht erwartet. Die Oerter und die Bewegungen derjenigen Fixsterne, deren Entfernungen vom Monde die Ephemeriden anzugeben pflegen, sind endlich, aus den Untersuchungen älterer und neuerer Beobachtungen, so genau bekannt geworden, dafs man sie für jede astronomische Anwendung, geschweige denn für die nautische, für genügend erachtet.

Der zweite Theil der Auflösung der Aufgabe, nämlich die Beobachtung der Entfernungen des Mondes, ist durch Vervollkommnung der Reflexionsinstrumente so weit gebracht, dafs die auf einem beweglichen Schiffe erreichbare Grenze von Genauigkeit wirklich erreicht werden zu können, und dann gegen die Grenze der Sicherheit, mit welcher auf die, der Berechnung zum Grunde zu legenden Oerter der Gestirne gezählt werden kann, nicht so sehr zurück zu bleiben scheint, als man bei der nothwendigen Kleinheit der Reflexionsinstrumente erwarten sollte.

Der dritte Theil der Auflösung ist dagegen noch nicht so vollendet, dafs nicht noch Grund vorhanden sein sollte etwas zu wünschen: die Berechnungsart der Beobachtungen besitzt wirklich noch mehrere Unvollkommenheiten. Es hat zwar weder an Aufforderungen noch an Bemühungen gefehlt, auch diesen Theil der Auflösung zu erleichtern und sicher zu machen, und man besitzt, in Folge derselben, wirklich vielfältige Vorschriften und Hülfsmittel, welche von den Seefahrern mit Leichtigkeit angewandt werden; allein es ist dadurch noch nicht so weit gebracht worden, dafs Leichtigkeit der Anwendung und Sicherheit des Resultats vereinigt wären.

Die vorgeschlagenen Arten die Abplattung der Erde in Rechnung zu bringen, sind noch nicht so geschmeidig, dafs sie in allgemeine Anwendung gekommen wären, obgleich die

*) Soviel ich weifs, gehört die erste Idee, Distanzen der Planeten für die Längenbestimmung zu gebrauchen, meinem verewigten Freunde *v. Lövenörn*. Ehe meine Ephemeriden herauskamen, hatte auch schon Herr *Inghirami* Planetendistanzen vom Monde in Herrn *v. Zachs* Correspondance Astronomique gegeben. S.

Voraussetzung der Kugelgestalt der Erde einen mehr als 15″ betragenden Fehler der auf ihren Mittelpunkt reducirten Distanz erzeugen kann. — Ferner wird die Befreiung der beobachteten Distanz von der Strahlenbrechung dadurch fehlerhaft, dafs die Strahlenbrechungen für die Mittelpunkte der Gestirne berechnet werden, während sie für diejenigen Punkte ihrer Ränder berechnet werden sollten, zwischen welchen man die Entfernung gemessen hat. Dieser Fehler erlangt seinen gröfsten Einflufs wenn Mond und Sonne in Einem Verticalkreise, auf derselben Seite des Scheitelpunktes stehen und die Entfernung der nächsten Ränder gemessen worden ist, denn dann ist derselbe der Summe der Veränderungen der Strahlenbrechung vom Mittelpunkte bis zum Rande jedes der beiden Gestirne gleich; er beträgt, wenn eins derselben resp. 20°, 15°, 10°, 5° über dem Horizonte, das andere beträchtlich höher steht, etwa 3″, 5″, 9″, 27″; und selbst dem letzten, gröfsten Fehler wird man wirklich ausgesetzt sein, indem es nicht rathsam sein würde, einen gröfseren Theil der sichtbaren Hälfte der Himmelskugel, als nothwendig geschehen mufs, der Anwendung der Mondsmethode zu entziehen. Die Grenze dieses Theils wird durch diejenigen Störungen der Strahlenbrechung bestimmt, welche durch die Nähe des Horizonts erzeugt, aber durch die meteorologischen Instrumente nicht erkannt werden; dafs diese selbst in der Zenithdistanz von 85° noch nicht so beträchtlich sind, dafs sie nöthigten, die Gränze höher hinauf zu verlegen, habe ich durch Beobachtungen gezeigt *).

Zu diesen, der Rechnungsmethode angehörigen Fehlern gesellen sich noch andere, welche nicht sowohl aus der Methode, als aus der üblichen Art dieselbe anzuwenden entstehen. Man wendet nämlich immer nur mittlere Werthe der Strahlenbrechung an, vernachlässigt daher die Veränderungen welche sie mit den Ständen des Barometers und Thermometers erleidet. Wenn man den ersten einen englischen Zoll, den zweiten 40° Fahr. von dem Stande welchen die Tafel voraussetzt verschieden annimmt, so sind die dadurch entstehenden Veränderungen der Strahlenbrechung für verschiedene Zenithdistanzen:

Z. D.	Barom.	Therm.	Summe.
40°	1″6	3″8	5″4
50	2,0	4,6	6,6
60	3,4	7,8	11,2
70	5,3	12,4	17,7
75	7,1	16,8	23,9
80	10,6	25,4	36,0
85	19,3	48,5	67,8

*) Astr. Beobb. auf der Sternwarte in Königsberg. VII Abthl. S. XXVII.

Die Beträchtlichkeit dieser Veränderungen scheint zu fordern, dafs man dem Seefahrer entweder die Anwendung der meteorologischen Instrumente zur Pflicht mache, oder ihm die Fälle in welchen der Einflufs ihrer Angaben auf das Resultat, beträchtlich werden kann, als unsicher darstelle; welches letztere man jedoch, um die Anwendung der Methode nicht zu beschränken, gern vermeiden wird. Indessen steht auch der Benutzung des Barometers und Thermometers ein nicht unbeträchtliches Hindernis im Wege: die üblichen Berechnungsarten beruhen nämlich auf Tafeln, welche die Horizontalparallaxe des Mondes und seine scheinbare Höhe zu Argumenten haben und entweder den Unterschied der Höhenparallaxe und Strahlenbrechung, oder einen hiervon abhängigen Logarithmen *) angeben, deren Entbehrung dem Seefahrer gröfsere Arbeit verursachen würde als man ihm zuzumuthen geneigt ist, deren Anwendung aber mit der Verbesserung des Fehlers unverträglich ist, indem sie nur unter der Voraussetzung eines mittleren Werthes der Strahlenbrechung berechnet sein können. Diese Tafeln sind nicht etwa ausschiefslich für gröfsere Höhen der Gestirne, wo der aus der Vernachlässigung der meteorologischen Instrumente entstehende Fehler weniger gefährlich wird, bestimmt, sondern sie gehen bis auf Höhen von 3° herab.

Endlich sollte, meines Erachtens, die Auflösung der Aufgabe so eingerichtet werden, dafs das Messen der Höhen der Gestirne vermieden und die Beobachtung auf die Messung der Entfernung allein beschränkt würde. Denn durch die scheinbare Entfernung zu gegebener Zeit des Beobachtungsortes, durch die Polhöhe desselben und durch die in den Ephemeriden enthaltenen Oerter der Gestirne ist die Aufgabe völlig bestimmt, und wenn man noch anderes, in die Rechnung eingehendes aus Beobachtungen ableitet, so ist der Erfolg davon, dafs die Fehler dieser Beobachtungen das Resultat der Distanzmessung mehr oder weniger entstellen. Dieser Nachtheil würde indessen für die Anwendung wenig bedeuten, wenn man die Höhen der Gestirne immer mit einiger Genauigkeit messen könnte; aber dieses ist nicht der Fall, denn oft ist die Undeutlichkeit des Meereshorizonts so störend, oder die unregelmäfsige Einwirkung der Strahlenbrechung auf denselben so grofs, dafs das Messen der Höhen nur eine rohe Annäherung gewähren kann. In vielen Fällen ist der Horizont ganz unsichtbar, wodurch das Messen der Höhen wegfällt und die Berechnung derselben nothwendig wird. Könnte man die aus der

*) Logarithmic Difference, nach der Benennung der Englischen Navigationsbücher.

Berechnung der Höhen entstehende Vermehrung der Arbeit zum Theil vermeiden, so würde der Grund, das Resultat der Hauptbeobachtung durch das Messen derselben zu beeinträchtigen, in demselben Maafse an Gewicht verlieren.

Die hier angeführten Unvollkommenheiten der Berechnungsart der Distanz-Messungen kann man zwar vermeiden, allein die Zusätze, welche man den üblichen Methoden würde hinzufügen müssen wenn dieses geleistet werden sollte, würden die Arbeit so sehr vermehren, dafs man Bedenken haben mufs, sie den Seefahrern als nothwendig zu empfehlen. Jeder der versucht hat, beobachtete Entfernungen des Mondes von einem anderen Gestirne, durch solche Zusätze richtig zu reduciren, wird, mit mir übereinstimmend, dieses Mittel für unanwendbar für den Seegebrauch erkennen. Es bleibt dann nichts übrig, als entweder die Fehler bestehen zu lassen, oder den üblichen Berechnungsarten eine ganz verschiedene, welche diese Fehler nicht besitzt, zu substituiren.

Ohne auf die Beantwortung der Frage einzugehen, ob die Vermeidung der angeführten Fehler der Rechnung für den Seegebrauch mehr oder weniger wesentlich ist, kann man keinen Zweifel darüber haben, dafs von zwei Methoden, welche beide gleichviel Rechnung erfordern, deren eine aber genau ist, während die andere, statt der der Beobachtung wirklich entsprechenden Länge des Beobachungsortes, eine oft einen Viertelgrad abweichende geben, in besonders ungünstigen Fällen aber noch beträchtlich mehr abirren kann, die erstere den Vorzug verdient. — Ich habe daher für angemessen gehalten, zu versuchen, ob die angeführten Unvollkommenheiten nicht durch Betretung eines verschiedenen Weges vermieden werden können: das was ich dadurch erlangt habe werde ich im Folgenden auseinandersetzen.

1.

Die vielfältigen Berechnungsarten, welche man bisher angewandt hat, sind, so viel ich weifs, sämmtlich von einer und derselben Ansicht ausgegangen: es werden nämlich zwei sphärische Dreiecke betrachtet, deren Seiten resp. die scheinbaren Zenithdistanzen und die scheinbare Entfernung, und die wahren Zenithdistanzen und die wahre Entfernung sind, und welche beide einen gemeinschaftlichen Winkel am Scheitelpunkte besitzen; die Reduction der scheinbaren Entfernung auf die wahre wird dadurch erlangt, dafs man die Veränderung der dem gemeinschaftlichen Winkel gegenüberstehenden Seite sucht, welche durch die, von der Parallaxe und der Refraction herrührenden Veränderungen der ihn einschliefsenden Seiten entsteht. Die vorhandenen Vorschriften unterscheiden sich wesentlich in der Art wie sie diese Veränderung ergeben, aber in der Grundidee stimmen sie alle überein.

Die neue Berechnungsart, welche ich hier mittheile, geht von einer anderen Ansicht der Aufgabe aus. Ich werde sie zuerst im Allgemeinen erläutern, ohne mich dabei auf die Rechnung deren Ausführung sie fordert einzulassen; dann werde ich, ohne alle Rücksicht auf das Bedürfnis und die Bequemlichkeit der Seefahrer, die Rechnung streng durchführen; endlich werde ich Abkürzungen angeben, welche die Genauigkeit des Resultats wenig beeinträchtigen und welche benutzt werden können wenn es sich um wirkliche Anwendung handelt. — Ich werde zuerst den einfachsten Fall voraussetzen, nämlich dafs das Gestirn von welchem die Entfernung des Mondes gemessen wird, ein Fixstern, also ein Punkt ohne Halbmesser und Parallaxe ist; der zusammengesetztere Fall, welcher eintritt wenn das mit dem Monde verglichene Gestirn Halbmesser und Parallaxe zeigt, wird später auf den einfacheren zurückgeführt werden.

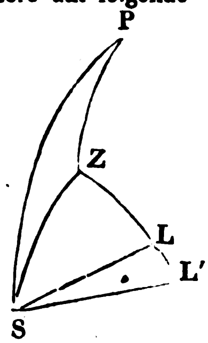
Ich nehme den Mittagsunterschied des Beobachtungsortes und des Meridians der Ephemeride als näherungsweise bekannt ($= m$) an und suche die Verbesserung desselben ($= x$), welche aus der Vergleichung der unmittelbar beobachteten Entfernung eines der Mondränder von dem Sterne ($= D'$), der Zeit der Beobachtung ($= T$) und den Angaben der Ephemeride hervorgeht. Den Mittagsunterschied und seine Verbesserung positiv wenn sie westlich, negativ wenn sie östlich sind, und die Zeitart in welcher T ausgedrückt wird so angenommen wie die Ephemeride sie voraussetzt, suche ich für die Zeit $T+m$, aus der Ephemeride, die wahre Entfernung des Mittelpunktes des Mondes von dem Sterne ($= d$), berechne daraus die durch die Parallaxe geänderte ($= d'$) und endlich die auch die Refraction einschliefsende, scheinbare Entfernung des Mondrandes ($= D$). Diese mit der beobachteten verglichen, ergibt die gesuchte Verbesserung des angenommenen Mittagsunterschiedes, nach der Formel

$$x = \frac{D'-D}{n'}$$

in welcher n' die einer Zeitsecunde des Mittagsunterschiedes entsprechende Veränderung von D bedeutet.

Zuerst bemerke ich, dafs man die Abplattung der Erde vollständig berücksichtigt, indem man die Angaben der Ephemeride, vor ihrer Anwendung, auf denjenigen Punkt der Erdaxe reducirt, welcher in der Richtung der Verticallinie des Beobachtungsortes liegt. Ich werde also diese Reduction als schon gemacht annehmen, den Punkt auf den sie sich bezieht aber, der Kürze wegen, den Punkt O nennen.

Ferner bringe ich die Einwirkungen der Parallaxe und der Refraction voneinander getrennt, die erstere auf folgende Art in Rechnung. Wenn P den Pol, Z das Zenith, S den Stern, L den vom Punkte O gesehenen Ort des Mondes, L' den vom Beobachtungsorte gesehenen bedeuten, so werden die Zenithdistanz ZS ($= Z$) und der parallactische Winkel PSZ ($= q$) des Sterns aus der Polhöhe ($= \varphi$), dem Stundenwinkel ($= t$) und der Declination ($= \Delta$) berechnet; für die Zeit $T + m$ werden die Entfernung, der Positionswinkel des Mondes am Sterne, die Aequatoreal-Horizontalparallaxe und der Halbmesser des Mondes aus der Ephemeride genommen und durch d, Q, π und ρ, nach ihrer Reduction auf den Punkt O aber durch $d_,$, $Q_,$, $\pi_,$ und $\rho_,$ bezeichnet; durch $ZS = Z$, $SL = d_,$ und den Winkel $ZSL = Q_, - q$ ($= P_,$) werden endlich $SL' = d'$, ZSL' ($= P'$) und die Entfernung des Mondes von dem Beobachtungsorte ($= r'$) ausgedrückt. Da der scheinbare Halbmesser des Mondes ($= \rho'$) durch $\rho_,$ und r' gegeben ist, so erhält man, indem man ihn von d' abzieht oder zu d' hinzufügt, die scheinbare Entfernung des Mondrandes vom Sterne ($= d''$), so wie sie sein würde wenn keine Refraction vorhanden wäre.



Die Einwirkung der Refraction, durch welche d'' in D verwandelt wird, erhält man durch Z, d'' und P' ausgedrückt, auf eine Art, welche durch die unten vorkommende Entwickelung besser erläutert werden wird als durch das was ich in dieser Skizze der Methode darüber sagen könnte. Ueber die Berechnung von n' darf hier gleichfalls nichts vorausgeschickt werden, da es sich von selbst versteht, dafs man sie durch dasjenige Mittel erhalten wird, welches das Verhältnis der zusammengehörigen Veränderungen von m und D am leichtesten ergiebt.

2.

Ich werde nun die einzelnen Theile dieses Entwurfes ausführen und mit der der **Ephemeride zu gebenden Einrichtung** anfangen.

Den durch Q bezeichneten Positionswinkel werde ich so zählen, dafs er mit 0 anfängt wenn der Mond die Rectascension des Sterns hat, aber nördlich von demselben steht, dafs er sich in den beiden ersten Quadranten befindet wenn der Mond weniger als 180° auf den Stern folgt, in den beiden letzten Quadranten wenn der Mond dem Sterne weniger als 180° vorangeht. Die Ausdrücke von $Q_,$ und $d_,$ durch die Rectascension α und $\delta_,$ des Mondes und A und Δ des Sterns sind folgende:

$$\cos d_, = \sin\Delta \sin\delta_, + \cos\Delta \cos\delta_, \cos(\alpha - A)$$
$$\sin d_, \cos Q_, = \cos\Delta \sin\delta_, - \sin\Delta \cos\delta_, \cos(\alpha - A)$$
$$\sin d_, \sin Q_, = \cos\delta_, \sin(\alpha - A),$$

allein da die darin vorkommende Declination des Mondes sich auf den von der Polhöhe des Beobachtungsortes abhängigen Punkt O bezieht, und die Ephemeride nur für den Mittelpunkt der Erde berechnet sein kann, so müssen diese Formeln von der für den Mittelpunkt der Erde geltenden Declination δ abhängig gemacht werden.

Die Entfernung des Punktes O vom Mittelpunkte der Erde, welche ich durch $-ai$ bezeichnen werde, ist bekanntlich

$$= -\frac{a\,ss\,\sin\varphi}{\sqrt{[1 - ss\,\sin\varphi^2]}}$$

wo a den Aequatorealhalbmesser der Erde, s die Excentricität ihrer Meridiane bezeichnen. Werden die Entfernungen des Mondes vom Mittelpunkte der Erde und vom Punkte O durch r und $r_,$ bezeichnet, so hat man

$$r_, \cos\delta_, = r \cos\delta$$
$$r_, \sin\delta_, = r \sin\delta + ai$$

wodurch die Formeln für $d_,$ und $Q_,$ sich in

$$r_, \cos d_, = r[\sin\Delta \sin\delta + \cos\Delta \cos\delta \cos(\alpha - A)] + ai \sin\Delta$$
$$r_, \sin d_, \cos Q_, = r[\cos\Delta \sin\delta - \sin\Delta \cos\delta \cos(\alpha - A)] + ai \cos\Delta$$
$$r_, \sin d_, \sin Q_, = r \cos\delta \sin(\alpha - A)$$

verwandeln. Die von i unabhängigen Theile derselben drücken resp.

$$r \cos d, \quad r \sin d \cos Q, \quad r \sin d \sin Q$$

aus; wenn man daher

$$\cos d = \sin\Delta \sin\delta + \cos\Delta \cos\delta \cos(\alpha - A)$$
$$\sin d \cos Q = \cos\Delta \sin\delta - \sin\Delta \cos\delta \cos(\alpha - A)$$
$$\sin d \sin Q = \cos\delta \sin(\alpha - A)$$

setzt, und die hieraus hervorgehenden Werthe von d und Q in der Ephemeride angiebt, so hat man die zur Berechnung der Mondsdistanzen geeigneten, eine fernere Rücksicht auf die Abplattung der Erde unnöthig machenden Werthe von $r_,$, $d_,$, $Q_,$ aus den Formeln

$$r_, \cos d_, = r \cos d + ai \sin\Delta$$
$$r_, \sin d_, \cos Q_, = r \sin d \cos Q + ai \cos\Delta$$
$$r_, \sin d_, \sin Q_, = r \sin d \sin Q$$

welche, wenn man das gänzlich unbedeutende Quadrat von i vernachlässigt,

$$r_, = r + ai \sin\delta$$
$$d_, = d - \frac{a}{r} i \,(\sin\Delta \sin d - \cos\Delta \cos d \cos Q)$$
$$Q_, = Q - \frac{a}{r} i \,\frac{\cos\Delta \sin Q}{\sin d}$$

ergeben.

Da die Entfernung des Punktes O vom Beobachtungsorte

$$= \frac{a}{\sqrt{[1 - ee \sin \varphi^2]}}$$

ist, so hat man

$$\sin \pi_{,} = \frac{a}{r_{,} \sqrt{[1 - ee \sin \varphi^2]}} = \frac{r \sin \pi}{r_{,} \sqrt{[1 - ee \sin \varphi^2]}}$$

$$\sin \rho_{,} = \frac{r}{r_{,}} \sin \rho;$$

damit man also $\pi_{,}$ und $\rho_{,}$ leicht aus der Ephemeride finden könne, mufs diese den Logarithmen von $\frac{r}{r_{,}}$ enthalten, oder da das Quadrat von i von keiner Bedeutung ist, das erste Glied seiner Entwickelung:

$$= -0{,}43429\ ee \sin \pi \sin \delta \cdot \frac{\sin \varphi}{\sqrt{[1 - ee \sin \varphi^2]}}$$

Meines Erachtens würde die vollständige Ephemeride am bequemsten sein, wenn sie für jede dritte Stunde angäbe: ($\omega = 206264''8$)

1. d und den Logarithmen von
$$-\omega\, ee \sin \pi\ [\sin \Delta \sin d - \cos \Delta \cos d \cos Q]$$
2. Q und den Logarithmen von
$$-\omega\, ee \sin \pi \cdot \frac{\cos \Delta \sin Q}{\sin d}$$
3. $Log. \sin \pi$ und $Log. \rho$ und den Logarithmen von
$$-43429\ ee \sin \pi \sin \delta$$
4. Die Rectascension der Sonne weniger der Rectascension des Sterns, so wie auch die Declination des Sterns.

Bei der Anwendung wäre dann zu den 3 Logarithmen von welchen die Reduction auf den Punkt O abhängt, der Logarithme von

$$\frac{\sin \varphi}{\sqrt{[1 - ee \sin \varphi^2]}},$$

für welchen man ohne wesentlichen Nachtheil $l. \sin \varphi$ nehmen kann, zu addiren; die Summen sind die Logarithmen der Verbesserungen von d und Q und der Logarithmen von $\sin \pi$ und ρ, die letzteren in Einheiten der 5ten Decimale angegeben. Addirt man zu dem so verbesserten Werthe des $l. \sin \pi$ den Logarithmen von

$$\frac{1}{\sqrt{[1 - ee \sin \varphi^2]}}$$

den man aus einer Tafel, deren Argument φ ist, nehmen kann, so erhält man $l. \sin \pi_{,}$ und hiermit hat man **Alles** was man für den Mond gebraucht. Die beiden Angaben 4. sollen die Rechnung für den Stern erleichtern: die erstere derselben zu der Beobachtungszeit T addirt ergiebt die Entfernung des Sterns von seiner nächstvorhergegangenen Culmination. Sind die Ephemeriden auf wahre Zeit gestellt so wird die wahre Rectascension der Sonne, sind sie auf mittlere Zeit gestellt die mittlere zur Berechnung dieser Angabe angewandt.

Von einer so eingerichteten Ephemeride werde ich hier ein Beispiel geben, welches alles enthält was zur Reduction von Entfernungen des Mondes von α Arietis, welche zwischen der Greenwicher Mitternacht des 2ten Juni 1831 und dem darauf folgenden Mittage beobachtet worden sind, erforderlich ist. Die zu der Berechnung dieses Beispiels erforderlichen Werthe von α, δ, π habe ich aus dem Nautical-Almanac interpolirt; den Halbmesser habe ich nach dem *Burckhardt*schen Verhältnisse

$$\sin \rho = 0{,}2725 \sin \pi$$

angenommen; den Ort des Sterns nach den Tabulis Regiomontanis:

$$A = 29^\circ 24' 53''5; \quad \Delta = +22^\circ 39' 24''9;$$

die Abplattung der Erde $= \frac{1}{300}$.

W. Z. in Greenw.	Distanz.	Log. Corr.	Positionswinkel.	Log. Corr.	Log. sin. Hor. P.	Log. Halbm.	Log. Corr.	Reduction der W. Z.	Decl. d. Sterns.
h	° ′ ″		° ′ ″					h ′ ″	
Juni 2. 12	62 1 41,9	1,084n	243 5 14	1,324	8,21754	2,96734	9,953	2 42 42,0	+22°39′25″
15	60 28 27,3	1,092n	242 33 0	1,330	8,21829	2,96808	9,935	43 12,7	
18	58 55 1,5	1,100n	241 59 38	1,335	8,21905	2,96884	9,916	43 43,4	
21	57 21 24,9	1,108n	241 25 2	1,341	8,21982	2,96961	9,896	44 14,2	
3. 0	55 47 38,2	1,115n	240 49 5	1,347	8,22060	2,97039	9,873	44 44,9	

Zum Beispiele der Anwendung dieser Ephemeride will ich das zur Berechnung einer am 2 Juni $14^h 24' 10''$ W. Z. in Königsberg gemessenen Entfernung des Mondes von α Arietis Erforderliche suchen. Die Polhöhe ist $54^\circ 42' 50''$, $l. \sin \varphi = 9{,}912$; den Mittagsunterschied m nehme ich $= -1^h 22' 0''$, also $T + m = 13^h 2' 10''$. Für diese Zeit giebt die Ephemeride:

	61° 29′ 31″,1	1,087n	242° 54′ 14″	1,326	8,21780	2,96760	9,947
Polhöhe	− 10,0	9,912	+ 17	9,912	+ 1	+ 1	9,912
	61 29 21,1	0,999n	242 54 31	1,238	8,21781	2,96761	9,859

Dem $l. \frac{r}{r_{,}} \sin \pi$ wird der Log. von

$$\frac{1}{\sqrt{[1 - ee \sin \varphi^2]}}$$

hinzugefügt, welcher aus der erwähnten und am Ende dieser Abhandlung abgedruckten Tafel $= 0{,}00097$ gefunden wird. Man hat also zur Berechnung der Beobachtung, ohne weitere Rücksicht auf die Abplattung der Erde, anzuwenden:

$$d_{,} = 61^\circ 29' 21''1$$
$$Q_{,} = 242\ 54\ 31$$
$$l. \sin \pi_{,} = 8{,}21878$$
$$l. \rho_{,} = 2{,}96761.$$

Die Entfernung des Sterns vom Meridiane ist

$$2^h 42' 52''{,}6 + 14^h 24' 10''{,}0 = 17^h 7' 2''{,}6, \text{ oder } t = 256^\circ 45' 39''.$$

3.

Ich werde nun die Wirkung der Parallaxe betrachten. Die Zenithdistanz Z und der parallactische Winkel q des Sterns finden sich aus den Formeln:

$$(\mathrm{I})\ldots\left\{\begin{aligned} \cos Z &= \sin\Delta\,\sin\varphi + \cos\Delta\,\cos\varphi\,\cos t\\ \sin Z\,\cos q &= \cos\Delta\,\sin\varphi - \sin\Delta\,\cos\varphi\,\cos t\\ \sin Z\,\sin q &= \cos\varphi\,\sin t\end{aligned}\right.$$

oder aus den zur logarithmischen Rechnung eingerichteten:

$$\begin{aligned} a &= \cos\varphi\,\sin t;\\ f\sin F &= \cos\varphi\,\cos t; \quad \tang Z\cos q = \cotg(F+\Delta)\\ f\cos F &= \sin\varphi; \quad \tang Z\sin q = \frac{a}{f}\operatorname{cosec}(F+\Delta)\end{aligned}$$

Wenn man die Zenithdistanzen des Mondes, so wie sie von dem Punkte O aus und von dem Beobachtungsorte erscheinen, durch $z_,$ und z', den Azimuthalwinkel zwischen dem Monde und dem Sterne durch E bezeichnet, übrigens aber die im 1 § gegebenen Bezeichnungen anwendet, so hat man die trigonometrischen Formeln:

$$\begin{aligned} \cos d_, &= \cos Z\,\cos z_, + \sin Z\,\sin z_,\,\cos E\\ \sin d_,\,\cos P_, &= \sin Z\,\cos z_, - \cos Z\,\sin z_,\,\cos E\\ \sin d_,\,\sin P_, &= -\sin z_,\,\sin E\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \cos d' &= \cos Z\,\cos z' + \sin Z\,\sin z'\,\cos E\\ \sin d'\,\cos P' &= \sin Z\,\cos z' - \cos Z\,\sin z'\,\cos E\\ \sin d'\,\sin P' &= -\sin z'\,\sin E.\end{aligned}$$

Ferner hat man zwischen $z_,$, z' und r' ($r_, = 1$ angenommen) die Relationen:

$$\begin{aligned} r'\cos z' &= \cos z_, - \sin\pi_,\\ r'\sin z' &= \sin z_,\end{aligned}$$

welche, wenn man die letzten Formeln mit r' multiplicirt und mit den ersten vergleicht:

$$\begin{aligned} r'\cos d' &= \cos d_, - \sin\pi_,\,\cos Z\\ r'\sin d'\,\cos P' &= \sin d_,\,\cos P_, - \sin\pi_,\,\sin Z\\ r'\sin d'\,\sin P' &= \sin d_,\,\sin P_,\end{aligned}$$

ergeben.

Die hieraus hervorgehenden folgenden Ausdrücke der unbekannten Gröfsen:

$$(\mathrm{II^a})\ldots\left\{\begin{aligned} r'\cos d' &= \cos d_, - \sin\pi_,\cos Z\\ r'\sin d'\cos(P'-P_,) &= \sin d_, - \sin\pi_,\sin Z\cos P_,\\ r'\sin d'\sin(P'-P_,) &= \sin\pi_,\sin Z\sin P_,\end{aligned}\right.$$

empfehlen sich durch ihre Einfachheit, so wie auch durch den Umstand, dafs ihre von der Parallaxe unabhängigen Theile, nämlich $\cos d_,$ und $\sin d_,$, keine Rechnung erfordern, sondern unmittelbar aus den nicht-logarithmischen trigonometrischen Tafeln genommen werden.

Zu einer zweiten Umformung gelangt man durch die Einführung eines Hülfswinkels G. Dividirt man nämlich die Summe der aus den beiden letzten der eben gegebenen Formeln hervorgehenden:

$$\begin{aligned} r'\sin d'\cos(P'-P_,) &= \sin d_, - \sin\pi_,\sin Z\cos P_,\\ r'\sin d' &= \sin d_,\cos(P'-P_,) - \sin\pi_,\sin Z\cos P'\end{aligned}$$

durch $1+\cos(P'-P_,)$, so erhält man

$$r'\sin d' = \sin d_, - \sin\pi_,\,\sin Z\,\frac{\cos\frac{1}{2}(P'+P_,)}{\cos\frac{1}{2}(P'-P_,)};$$

setzt man nun

$$\begin{aligned} g\sin G &= \sin Z\,\frac{\cos\frac{1}{2}(P'+P_,)}{\cos\frac{1}{2}(P'-P_,)}\\ g\cos G &= \cos Z\end{aligned}$$

so dafs die erste der obigen Gleichungen und die gegenwärtige die Form

$$\begin{aligned} r'\cos d' &= \cos d_, - g\sin\pi_,\,\cos G\\ r'\sin d' &= \sin d_, - g\sin\pi_,\,\sin G\end{aligned}$$

annehmen, welche sich offenbar in

$$\begin{aligned} r'\cos(d'-G) &= \cos(d_,-G) - g\sin\pi_,\\ r'\sin(d'-G) &= \sin(d_,-G)\end{aligned}$$

verwandeln läfst, so erhält man durch Division den Ausdruck der Cotangente von $d'-M$. Den Ausdruck der Cotangente von P' erhält man durch Division der beiden letzten der obigen Gleichungen. Man hat also

$$\left.\begin{aligned} \cotg P' &= \cotg P_, - \frac{\sin\pi_,\,\sin Z}{\sin d_,\,\sin P_,}\\ \cotg(d'-G) &= \cotg(d_,-G) - \frac{g\,\sin\pi_,}{\sin(d_,-G)}\end{aligned}\right\}\ldots(\mathrm{II^b})$$

und diese Formeln scheinen, zumahl wenn man r' nicht kennen zu lernen verlangt, noch bequemer zu sein als die ersteren.

Die letzteren Formeln ergeben auch, bei gleicher Schärfe der Rechnung, ein genaueres Resultat als die ersteren. Wendet man nicht-logarithmische trigonometrische Tafeln mit 6 richtigen Decimalstellen zur Rechnung an, so kann der daraus hervorgehende Fehler von d', wenn man übrigens so genau wie möglich rechnet, nach den ersten Formeln nicht 0″146 übersteigen; wendet man aber, im Verfolge der Rechnung, auch logarithmische Tafeln mit 6 Decimalstellen an, so können auch diese einen Fehler von 0″356 erzeugen, so dafs d', bei dieser Annäherung der Tafeln, 0″502 fehlerhaft werden kann. Die zweiten Formeln, bei welchen Logarithmen nur zur Berechnung der von der Parallaxe abhängigen Gröfsen angewandt werden, ergeben dagegen, gleichfalls unter der Voraussetzung von Cotangenten-Tafeln mit 6 richtigen Decimalstellen, die Grenze des Fehlers $=$ 0″206. Es ist übrigens klar, dafs die Berechnung von P', so wie auch aller von der Parallaxe abhängiger Gröfsen, mit geringerer Genauigkeit geführt werden darf als die Berechnung von d'.

Man kann auch Formeln zur Berechnung der Unterschiede $d'-d_{,}$ und $P'-P_{,}$ angeben, sowohl streng richtige, als durch Annäherungen zum Ziele führende; allein ich werde es hier bei den abgeleiteten bewenden lassen und jene mittheilen wo ich sie gebrauchen werde.

Aus r' und $\rho_{,}$ erhält man

$$\rho' = \frac{\rho_{,}}{r'}$$

und damit die scheinbare Distanz des nächsten oder entferntesten Mondrandes (d'') von dem Sterne:

$$d'' = d' \mp \rho'.$$

4.

Es ist noch nöthig, der Entfernung d'' die **Einwirkung der Strahlenbrechung** hinzuzufügen.

Aller Schärfe nach genommen ist diese Einwirkung der Unterschied zwischen d'' und dem Bogen eines gröfsten Kreises, welcher am scheinbaren Orte des Sterns anfängt und sich da endigt, wo er auf dem Rande des (nicht kreisförmig erscheinenden) Mondes normal ist. Man übersieht zwar wohl, dafs der Unterschied dieser, die Scheibe des Mondes berücksichtigenden Einwirkung und der Veränderung der Entfernung d'' durch die Strahlenbrechung, nicht beträchtlich sein könne, allein die Absicht eine **genaue** Berechnungsmethode zu entwickeln, zwingt mich dennoch, diesen Unterschied nicht unerörtert zu lassen. Zuerst werde ich aber die Veränderung der Entfernung d'' suchen, welche dadurch entsteht, dafs die Strahlenbrechung die beiden **Punkte**, zwischen welchen diese Entfernung stattfindet, erhöhet.

Der endliche Ausdruck der scheinbaren Entfernung D, welche dadurch aus der wahren Entfernung d'' entsteht, dafs die Zenithdistanzen Z und z durch die Strahlenbrechung in $Z-R$ und $z-r$ verändert werden, ist bekanntlich:

$$\cos D = \cos(z-r)\cos(Z-R) + \frac{\sin(z-r)\sin(Z-R)}{\sin z \sin Z}(\cos d'' - \cos z \cos Z)$$

Wenn man die Winkel welche in dem Dreiecke zwischen dem Scheitelpunkte und den wahren Oertern des Punktes am Mondrande und des Sterns, an den Seiten z und Z anliegen, durch $360^\circ - p'$ und P' bezeichnet, so findet man die Entwickelung dieses Ausdruckes, bis zu dem Quadrate der Refraction incl.:

$$D = d' - r\cos p' - R\cos P' + \left(\frac{r\sin p' + R\sin P'}{2}\right)^2 \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}d' - \left(\frac{r\sin p' - R\sin P'}{2}\right)^2 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}d''$$

Die Anwendung dieser Entwickelung ist weit vortheilhafter als die der endlichen Formel, denn man kann sie so umformen, dafs ihre Berechnung wenige Mühe verursacht. Man führt, um dieses zu erlangen, statt der Strahlenbrechungen zwei neue Gröfsen k und K, welche so davon abhängen, dafs

$$k = r \operatorname{cotg} z, \quad K = R \operatorname{cotg} Z$$

ist, in die Rechnung ein und drückt dann z und p' durch Z, P' und d'' aus, was durch die Formeln:

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos d'' \cos Z + \sin d'' \sin Z \cos P' \\ \sin z \cos p' &= \sin d'' \cos Z - \cos d'' \sin Z \cos P' \\ \sin z \sin p' &= -\sin Z \sin P' \end{aligned}$$

geschieht. Bestimmt man einen Hülfswinkel H, nach der Formel

$$\operatorname{tang} H = \operatorname{tang} Z \cos P'$$

so erhält man dadurch:

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{\cos Z}{\cos H}\cos(d'-H) \\ \sin z \cos p' &= \frac{\cos Z}{\cos H}\sin(d'-H) \\ \sin z \sin p' &= -\sin Z \sin P' \end{aligned}$$

und wenn man dieses in dem Ausdrucke von D substituirt:

$$\begin{aligned} D = d' &- k \operatorname{tang}(d'-H) - K \operatorname{tang} H \\ &+ \tfrac{1}{4}\operatorname{tang} Z^2 \sin P'^2 \left\{\left(k\frac{\cos H}{\cos(d'-H)} - K\right)^2 \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}d' - \left(k\frac{\cos H}{\cos(d'-H)} + K\right)^2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}d'\right\} \end{aligned}$$

Das zweite Glied dieses Ausdruckes läfst sich unter die Form

$$-\tfrac{1}{2}\frac{\operatorname{tang} Z^2 \sin P'^2}{\cos(d'-H)^2}\left\{kk\sin 2H + KK\sin 2(d'-H) - 2(k-K)^2\frac{\cos H\cos(d'-H)}{\sin d'}\right\}$$

bringen, und da der $(k-K)^2$ enthaltende Theil desselben immer unbedeutend ist, auf

$$-\tfrac{1}{2}\frac{\operatorname{tang} Z^2 \sin P'^2}{\cos(d'-H)^2}\left\{kk\sin 2H + KK\sin 2(d'-H)\right\}$$

reduciren. Man hat daher

$$\text{(III)}\quad D = d' - k\operatorname{tang}(d'-H) - K\operatorname{tang} H - \sin 1''\left(\frac{\operatorname{tang} Z \sin P'}{\cos(d'-H)}\right)^2\left\{kk\sin 2H + KK\sin 2(d'-H)\right\}$$

Jetzt werde ich die Verbesserung untersuchen, welche aus der am Anfange dieses § erwähnten Ursache hervorgeht. Dabei werde ich den Ausdruck der scheinbaren Entfernung des Sterns von dem Punkte des Mondrandes welcher in der durch den Stern, den Mittelpunkt des Mondes und den Beobachtungsort gehenden Ebene liegt,

$$D = d' \mp \rho' - r\cos p' - R\cos P'$$

annehmen, indem der an sich sehr kleine Theil der zweiten Ordnung, hier, wo nur ein sehr kleiner Unterschied bestimmt werden soll, vernachlässigt werden kann; auch werde ich nur die erste Potenz von ρ' in die Rechnung aufnehmen.

Betrachtet man, statt des in der Richtung vom Mittelpunkte des Mondes nach dem Sterne liegenden, einen anderen Punkt des Mondrandes, dessen Radius mit dieser Richtung einen Winkel u macht, und bezeichnet man die für jenen durch D, $d'' = d' \mp \rho'$, r, p', P' bezeichneten Grössen, für diesen durch (D), (d''), (r), (p'), (P'), so hat man die scheinbare Entfernung dieses Punktes vom Sterne

$$(D) = (d'') - (r)\cos(p') - R\cos(P').$$

Setzt man den in Beziehung auf u genommenen Differentialquotienten dieses Ausdruckes $= 0$, so erhält man die Gleichung durch welche der Werth von u bestimmt wird welcher dem Minimo oder Maximo von (D) entspricht; eliminirt man u aus derselben und dem Ausdrucke von (D) so erhält man das Minimum oder Maximum selbst. Man hat nun

$$(d'') = d'' \pm \rho'(1-\cos u)$$
$$(z) = z \mp \rho'(\cos(p'-u) - \cos p')$$
$$(p') = p' \mp \rho'\left(\frac{\sin p' - \sin(p'-u)}{\operatorname{tang} z} - \frac{\sin u}{\operatorname{tang} d''}\right)$$
$$(P') = P' \pm \rho' . \frac{\sin u}{\sin d''}$$

und aus dem Ausdrucke von (z):

$$(r) = r \mp \rho' \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}(\cos(p'-u) - \cos p')$$

Substituirt man dieses in den Ausdruck von (D), so erhält man

$$(D) = D \pm \rho'(1-\cos u)\left\{1 - \frac{r\sin p'^2}{\operatorname{tang} z} - \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\cos p'^2\right\}$$
$$\mp \rho' \sin u\left\{r\sin p'\left(\frac{\cos p'}{\operatorname{tang} z} - \frac{1}{\operatorname{tang} d''}\right) - \frac{R\sin P'}{\sin d''} - \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\sin p'\cos p'\right\}$$

oder kürzer bezeichnet:

$$(D) = D \pm \rho'(1-\cos u)a \mp \rho' \sin u . b,$$

welcher Ausdruck, mit der das Minimum oder Maximum bestimmenden Gleichung:

$$0 = a\sin u - b\cos u$$

verbunden

$$(D) = D \mp \frac{\rho' bb}{a + \sqrt{(aa+bb)}}$$

ergiebt.

Setzt man, um diesen Einfluſs der Strahlenbrechung völlig zu entwickeln, in dem Ausdrucke von r, nämlich

$$r = k\operatorname{tang} z,$$

k als unveränderlich voraus, was sehr nahe richtig ist, so erhält man

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z} = k + k\operatorname{tang} z^2$$

und ferner die durch a und b bezeichneten Quantitäten:

$$a = 1 - k - k\operatorname{tang} z^2\cos p'^2$$
$$b = -\frac{\operatorname{tang} z\sin p'}{\sin d''}\left\{k\frac{\cos Z}{\cos z} - K\frac{\cos z}{\cos Z}\right\}$$

Wenn man für $\cos Z$ und $\cos z$ die Ausdrücke

$$\cos Z = \cos z\cos d'' + \sin z\sin d''\cos p'$$
$$\cos z = \cos Z\cos d'' + \sin Z\sin d''\cos P'$$

schreibt, so verwandelt der Ausdruck von b sich in

$$-\operatorname{tang} z\sin p'\left\{k\operatorname{tang} z\cos p' - K\operatorname{tang} Z\cos P' + \frac{k-K}{\operatorname{tang} d''}\right\}$$

wovon man das letzte Glied, als unbedeutend, vernachlässigen kann. Drückt man endlich z und p' durch Z, P' und den oben schon eingeführten Winkel H aus, so erhält man

$$a = 1 - k\sec(d''-H)^2$$
$$b = \frac{\operatorname{tang} Z\sin P'\cos H}{\cos(d''-H)}\left\{k\operatorname{tang}(d''-H) - K\operatorname{tang} H\right\}$$

und wenn man k für K setzt, was nur unbedeutenden Fehler verursacht,

$$b = k\operatorname{tang} Z\sin P' . \frac{\sin(d''-2H)}{\cos(d''-H)^2}$$

(Die Fortsetzung folgt.)

A n z e i g e.

Diejenigen Herren Abonnenten welche diese Zeitschrift fortzusetzen wünschen, werden ersucht baldmöglichst Ihre Bestellungen zu machen, da keine Exemplare ohne ausdrückliche Bestellung weder an die respectiven Postämter noch an die Buchhandlungen abgegeben werden.

S.

Ausgegeben 1832. Februar 3.

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

№ 219.

Neue Berechnungsart für die nautische Methode der Mondes-Distanzen.

Von Herrn Professor und Ritter *Bessel*.

(Fortsetzung.)

Da dieser Einfluſs für $P' = 0$ und für $d'' = 2H$, oder für die Fälle daſs beide Gestirne ein gleiches Azimuth oder eine gleiche Höhe haben, verschwindet, so muſs er ein Maximum haben. Der Werth des Winkels p', für welchen dieses stattfindet, ergiebt sich, durch Differentiirung des Ausdruckes von b, aus der Gleichung des 4ten Grades:

$$\begin{aligned} 0 = \; & \cos p'^4 + \cos p'^3 \, \frac{5}{2 \operatorname{tang} z \operatorname{tang} d''} \\ & - \cos p'^2 \left(\tfrac{1}{2} - \frac{2}{\operatorname{tang} z^2 \operatorname{tang} d''^2} \right) \\ & - \cos p' \, \frac{2 \operatorname{tang} z^2 + 1}{\operatorname{tang} z^3 \operatorname{tang} d''} - \frac{2 + \operatorname{tang} d''^2}{\operatorname{tang} z^2 \operatorname{tgt} d''^2} \end{aligned}$$

Aber da der Einfluſs nur dann erheblich werden kann, wenn $\operatorname{tang} z$ sehr groſs ist, so kann man alle durch $\operatorname{tang} z$ dividirte Glieder der Gleichung ohne merklichen Fehler weglassen, wodurch sie sich auf

$$0 = \cos p'^4 - \tfrac{1}{2} \cos p'^2$$

reducirt und die hierhergehörigen Wurzeln $\cos p' = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ oder $p' = 45°$ und $135°$ ergiebt. Diese in den Ausdruck von b gesetzt ergeben das Maximum desselben:

$$= \mp \frac{k}{2} \operatorname{tang} z \left\{ \operatorname{tang} z + \sqrt{2} \operatorname{cotg} d'' + \text{etc.} \right\}$$

Man erkennt hieraus, daſs der gröſste Einfluſs der untersuchten Ursache, selbst wenn $z = 80°$ ist, kaum ein Hundertel, und wenn es $= 85°$ ist kaum ein Achtel einer Secunde beträgt. Es ist daher unnöthig diese Verbesserung zu berücksichtigen.

Die Formel (III) ist also als vollständig anzusehen. Um sie leicht und genau anwenden zu können, ist eine Tafel nöthig, welche die Logarithmen von k und K mit dem Argumente der wahren Zenithdistanz ergiebt. Eine Tafel dieser Art, aus welcher man die Strahlenbrechungen nach der Formel

$$\alpha \operatorname{tang} z \,.\, \beta^{A} \,.\, \gamma^{\lambda},$$

in welcher β und γ die von dem Barometer- und dem Thermometerstande abhängigen Factoren bedeuten, berechnet, theile ich hier mit. Sie ist aus der XIV Tafel der Tabb. Regiom. abgeleitet und enthält, auſser dem sich auf die wahre Zenithdistanz beziehenden Werthe von $\log \alpha$, auch die demselben Argumente angeeigneten Werthe von A und λ. Die Logarithmen von β und γ für die verschiedenen gebräuchlichen Scalen der meteorologischen Instrumente findet man in den Tabulis Regiomontanis. Ich habe die Tafel nicht über die Zenithdistanz von 85° hinaus fortgesetzt, weil ich diese, aus dem oben angeführten Grunde, als die Grenze ansehe, bis zu welcher die Beobachtung der Mondsdistanzen verstattet werden darf.

Z.D.	$\log \alpha$		λ	Z.D.	$\log \alpha$		λ
0°	1,76143	0		55°	1,76014	10	1,0023
5	1,76143	2		56	1,76004	11	1,0025
10	1,76141	2		57	1,75993	12	1,0028
15	1,76139	4		58	1,75981	14	1,0030
20	1,76135	5		59	1,75967	14	1,0032
25	1,76130	8		60	1,75953	16	1,0035
30	1,76122	1		61	1,75937	18	1,0037
31	1,76121	2		62	1,75919	20	1,0041
32	1,76119	3		63	1,75899	22	1,0044
33	1,76116	2		64	1,75877	25	1,0048
34	1,76114	2		65	1,75852	28	1,0053
35	1,76112	2		66	1,75824	31	1,0058
36	1,76110	3		67	1,75793	36	1,0064
37	1,76107	2		68	1,75757	40	1,0071
38	1,76105	3		69	1,75717	47	1,0078
39	1,76102	3		70	1,75670	55	1,0087
40	1,76099	3		71	1,75615	63	1,0097
41	1,76096	4		72	1,75552	74	1,0107
42	1,76092	4		73	1,75478	88	1,0118
43	1,76088	4		74	1,75390	106	1,0131
44	1,76084	4		75 0'	1,75284	19	1,0154
45	1,76080	5	1,0013	10	1,75265	20	1,0156
46	1,76075	5	1,0013	20	1,75245	20	1,0159
47	1,76070	5	1,0014	30	1,75225	21	1,0162
48	1,76065	6	1,0015	40	1,75204	22	1,0165
49	1,76059	6	1,0016	50	1,75182	23	1,0168
50	1,76053	6	1,0017	76 0	1,75159	23	1,0171
51	1,76047	7	1,0018	10	1,75136	24	1,0175
52	1,76040	8	1,0020	20	1,75112	25	1,0179
53	1,76032	8	1,0021	30	1,75087	27	1,0183
54	1,76024	10	1,0022	40	1,75060	27	1,0187
				50	1,75033	28	1,0191

Z.D.	log α		A	λ
77°0'	1,75005	29	0,9971	1,0195
10	1,74976	31	0,9970	1,0199
20	1,74945	31	0,9970	1,0204
30	1,74914	32	0,9969	1,0211
40	1,74882	34	0,9968	1,0218
50	1,74848	35	0,9967	1,0225
78 0	1,74813	36	0,9967	1,0231
10	1,74777	37	0,9966	1,0239
20	1,74740	39	0,9965	1,0247
30	1,74701	41	0,9964	1,0255
40	1,74660	43	0,9963	1,0262
50	1,74617	44	0,9962	1,0270
79 0	1,74573	46	0,9961	1,0277
10	1.74527	49	0,9960	1,0285
20	1,74478	50	0,9959	1,0292
30	1,74428	52	0,9958	1,0300
40	1,74376	55	0,9956	1,0308
50	1,74321	58	0,9955	1,0316
80 0	1,74263	60	0,9953	1,0323
10	1,74203	62	0,9952	1,0330
20	1,74141	66	0,9950	1,0338
30	1,74075	70	0,9948	1,0346
40	1,74005	72	0,9946	1,0355
50	1,73933	76	0,9943	1,0364
81 0	1,73857	80	0,9940	1,0374
10	1,73777	85	0,9938	1,0384
20	1,73692	87	0,9936	1,0395
30	1,73605	91	0,9933	1,0407
40	1,73514	97	0,9930	1,0421
50	1,73417	103	0,9928	1,0434
82 0	1,73314	107	0,9926	1,0447
10	1,73207	112	0,9922	1,0463
20	1,73095	121	0,9918	1,0480
30	1,72974	128	0,9915	1,0497
40	1,72846	135	0,9912	1,0514
50	1,72711	142	0,9907	1,0533
83 0	1,72569	151	0,9902	1,0553
10	1,72418	162	0,9898	1,0574
20	1,72256	173	0,9894	1,0594
30	1,72083	181	0,9888	1,0615
40	1,71902	194	0,9882	1,0636
50	1,71708	209	0,9877	1,0658
84 0	1,71499	223	0,9871	1,0680
10	1,71276	239	0,9863	1,0704
20	1,71037	255	0,9855	1,0731
30	1,70782	273	0,9847	1,0759
40	1,70509	293	0,9838	1,0788
50	1,70216	314	0,9828	1,0817
85 0	1,69902		0,9819	1,0847

Diese Tafel, welche auch anderweitig brauchbar sein wird, theile ich hier mit eben so vielen Decimalstellen mit als die Tafel besitzt, aus welcher sie abgeleitet ist; es wird aber selten Veranlassung vorhanden sein alle anzuwenden.

Die Logarithmen von k und K finden sich, aus dieser Tafel, mit den Argumenten z und Z,

$$= \log\alpha + A\log\beta + \lambda\log\gamma.$$

Nachdem durch die Angaben der Ephemeride und durch die Berechnung der Formeln I, II und III die scheinbare Distanz des beobachteten Mondrandes von dem Sterne gefunden ist, bleibt nur noch die im 1sten § durch n' bezeichnete, zu einer Aenderung des Mittagsunterschiedes (m) von einer Zeitsecunde gehörige Veränderung der scheinbaren Distanz D aufzusuchen übrig.

Wenn man diese Veränderung geradezu der Veränderung der wahren Distanz gleichsetzen will, so läfst man dadurch nur den Fehler unverbessert, welcher daraus entstanden ist, dafs die Einwirkungen der Parallaxe und Refraction für den Ort des Mondes berechnet worden sind, welcher der mit dem vorausgesetzten Mittagsunterschiede auf den Meridian der Ephemeride reducirten Beobachtungszeit zugehört, während diese Einwirkungen für den Mondsort berechnet sein sollten, welcher der Beobachtungszeit und dem durch die Beobachtung selbst berichtigten Mittagsunterschiede entspricht. Dieser Fehler beträgt immer nur einen kleinen Theil der gesuchten Verbesserung des Mittagsunterschiedes. Die folgende Differentiirung der scheinbaren Distanz wird das Mittel ihn zu vermeiden ergeben; denn die Bewegung des Mondes ist so langsam, dafs selbst wenn der vorausgesetzte Mittagsunterschied 10 oder 20 Zeitminuten fehlerhaft sein sollte, die von dem Quadrate der Bewegung abhängige Verbesserung noch nicht erheblich werden kann.

Indem die einer kleinen Aenderung des Mondsortes entsprechenden Aenderungen des immer sehr kleinen Einflusses des Quadrates der Refraction, so wie auch der Gröfse k, unbedeutend sind, ist der Ausdruck der scheinbaren Distanz:

$$D = d'' - k\,tang\,(d''-H) - K\,tang\,H$$

nur in Beziehung auf d'' und H zu differentiiren. Man hat also

$$\frac{dD}{dm} = \frac{dd''}{dm}\left(1 - \frac{k}{cos\,(d''-H)^2}\right) + \frac{dH}{dm}\left(\frac{k}{cos\,(d''-H)^2} - \frac{K}{cos\,H^2}\right)$$

und da

$$tang\,H = tang\,Z\,cos\,P',$$

also H nur mit P' veränderlich ist,

$$\frac{dD}{dm} = \frac{dd''}{dm}\left(1 - \frac{k}{cos\,(d''-H)^2}\right) - \frac{dP'}{dm}\,tang\,Z\,sin\,P'\left(\frac{k\,cos\,H^2}{cos\,(d''-H)^2} - K\right)$$

Um die Ausdrücke der Differentialquotienten von d'' und P' zu erhalten, mufs man die Formeln II differen

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

Nº. 219.

Neue Berechnungsart für die nautische Methode der Mondes-Distanzen.

Von Herrn Professor und Ritter *Bessel.*

(Fortsetzung.)

Da dieser Einfluſs für $P' = 0$ und für $d'' = 2H$, oder für die Fälle daſs beide Gestirne ein gleiches Azimuth oder eine gleiche Höhe haben, verschwindet, so muſs er ein Maximum haben. Der Werth des Winkels p', für welchen dieses stattfindet, ergiebt sich, durch Differentiirung des Ausdruckes von b, aus der Gleichung des 4ten Grades:

$$0 = \cos p'^4 + \cos p'^3 \frac{5}{2 \tang z \tang d''}$$
$$- \cos p'^2 \left(\tfrac{1}{2} - \frac{2}{\tang z^2 \tang d''^2}\right)$$
$$- \cos p' \frac{2 \tang z^2 + 1}{\tang z^3 \tang d''}, - \frac{2 + \tang d''^2}{\tang z^2 \operatorname{tgt} d''^2}$$

Aber da der Einfluſs nur dann erheblich werden kann, wenn $\tang z$ sehr groſs ist, so kann man alle durch $\tang z$ dividirte Glieder der Gleichung ohne merklichen Fehler weglassen, wodurch sie sich auf

$$0 = \cos p'^4 - \tfrac{1}{2} \cos p'^2$$

reducirt und die hierhergehörigen Wurzeln $\cos p' = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ oder $p' = 45^\circ$ und 135° ergiebt. Diese in den Ausdruck von b gesetzt ergeben das Maximum desselben:

$$= \mp \frac{k}{2} \tang z \left\{\tang z + \sqrt{2} \cotg d'' + \text{etc.}\right\}$$

Man erkennt hieraus, daſs der gröſste Einfluſs der untersuchten Ursache, selbst wenn $z = 80^\circ$ ist, kaum ein Hundertel, und wenn es $= 85^\circ$ ist kaum ein Achtel einer Secunde beträgt. Es ist daher unnöthig diese Verbesserung zu berücksichtigen.

Die Formel (III) ist also als vollständig anzusehen. Um sie leicht und genau anwenden zu können, ist eine Tafel nöthig, welche die Logarithmen von k und K mit dem Argumente der wahren Zenithdistanz ergiebt. Eine Tafel dieser Art, aus welcher man die Strahlenbrechungen nach der Formel

$$\alpha \tang z \,.\, \beta^{\lambda} \,.\, \gamma^{\lambda},$$

in welcher β und γ die von dem Barometer- und dem Thermometerstande abhängigen Factoren bedeuten, berechnet, theile ich hier mit. Sie ist aus der XIV Tafel der Tabb. Regiom. abgeleitet und enthält, auſser dem sich auf die wahre Zenithdistanz beziehenden Werthe von $\log \alpha$, auch die demselben Argumente angeeigneten Werthe von A und λ. Die Logarithmen von β und γ für die verschiedenen gebräuchlichen Scalen der meteorologischen Instrumente findet man in den Tabulis Regiomontanis. Ich habe die Tafel nicht über die Zenithdistanz von 85° hinaus fortgesetzt, weil ich diese, aus dem oben angeführten Grunde, als die Grenze ansehe, bis zu welcher die Beobachtung der Mondsdistanzen verstattet werden darf.

Z.D.	$\log \alpha$		λ	Z.D.	$\log \alpha$		λ
0°	1,76143	0		55°	1,76014	10	1,0023
5	1,76143	2		56	1,76004	11	1,0025
10	1,76141	2		57	1,75993	12	1,0028
15	1,76139	4		58	1,75981	14	1,0030
20	1,76135	5		59	1,75967	14	1,0032
25	1,76130	8		60	1,75953	16	1,0035
30	1,76122	1		61	1,75937	18	1,0037
31	1,76121	2		62	1,75919	20	1,0041
32	1,76119	3		63	1,75899	22	1,0044
33	1,76116	2		64	1,75877	25	1,0048
34	1,76114	2		65	1,75852	28	1,0053
35	1,76112	2		66	1,75824	31	1,0058
36	1,76110	3		67	1,75793	36	1,0064
37	1,76107	2		68	1,75757	40	1,0071
38	1,76105	3		69	1,75717	47	1,0078
39	1,76102	3		70	1,75670	55	1,0087
40	1,76099	3		71	1,75615	63	1,0097
41	1,76096	4		72	1,75552	74	1,0107
42	1,76092	4		73	1,75478	88	1,0118
43	1,76088	4		74	1,75390	106	1,0131
44	1,76084	4		75 0′	1,75284	19	1,0154
45	1,76080	5	1,0013	10	1,75265	20	1,0156
46	1,76075	5	1,0013	20	1,75245	20	1,0159
47	1,76070	5	1,0014	30	1,75225	21	1,0162
48	1,76065	6	1,0015	40	1,75204	22	1,0165
49	1,76059	6	1,0016	50	1,75182	23	1,0168
50	1,76053	6	1,0017	76 0	1,75159	23	1,0171
51	1,76047	7	1,0018	10	1,75136	24	1,0175
52	1,76040	8	1,0020	20	1,75112	25	1,0179
53	1,76032	8	1,0021	30	1,75087	27	1,0183
54	1,76024	10	1,0022	40	1,75060	27	1,0187
				50	1,75033	28	1,0191

Z.D.	$\log\alpha$		A	λ
77°0′	1,75005	29	0,9971	1,0195
10	1,74976	31	0,9970	1,0199
20	1,74945	31	0,9970	1,0204
30	1,74914	32	0,9969	1,0211
40	1,74882	34	0,9968	1,0218
50	1,74848	35	0,9967	1,0225
78 0	1,74813	36	0,9967	1,0231
10	1,74777	37	0,9966	1,0239
20	1,74740	39	0,9965	1,0247
30	1,74701	41	0,9964	1,0255
40	1,74660	43	0,9963	1,0262
50	1,74617	44	0,9962	1,0270
79 0	1,74573	46	0,9961	1,0277
10	1.74527	49	0,9960	1,0285
20	1,74478	50	0,9959	1,0292
30	1,74428	52	0,9958	1,0300
40	1,74376	55	0,9956	1,0308
50	1,74321	58	0,9955	1,0316
80 0	1,74263	60	0,9953	1,0323
10	1,74203	62	0,9952	1,0330
20	1,74141	66	0,9950	1,0338
30	1,74075	70	0,9948	1,0346
40	1,74005	72	0,9946	1,0355
50	1,73933	76	0,9943	1,0364
81 0	1,73857	80	0,9940	1,0374
10	1,73777	85	0,9938	1,0384
20	1,73692	87	0,9936	1,0395
30	1,73605	91	0,9933	1,0407
40	1,73514	97	0,9930	1,0421
50	1,73417	103	0,9928	1,0434
82 0	1,73314	107	0,9926	1,0447
10	1,73207	112	0,9922	1,0463
20	1,73095	121	0,9918	1,0480
30	1,72974	128	0,9915	1,0497
40	1,72846	135	0,9912	1,0514
50	1,72711	142	0,9907	1,0533
83 0	1,72569	151	0,9902	1,0553
10	1,72418	162	0,9898	1,0574
20	1,72256	173	0,9894	1,0594
30	1,72083	181	0,9888	1,0615
40	1,71902	194	0,9882	1,0636
50	1,71708	209	0,9877	1,0658
84 0	1,71499	223	0,9871	1,0680
10	1,71276	239	0,9863	1,0704
20	1,71037	255	0,9855	1,0731
30	1,70782	273	0,9847	1,0759
40	1,70509	293	0,9838	1,0788
50	1,70216	314	0,9828	1,0817
85 0	1,69902		0,9819	1,0847

Diese Tafel, welche auch anderweitig brauchbar sein wird, theile ich hier mit eben so vielen Decimalstellen mit als die Tafel besitzt, aus welcher sie abgeleitet ist; es wird aber selten Veranlassung vorhanden sein alle anzuwenden.

Die Logarithmen von k und K finden sich, aus dieser Tafel, mit den Argumenten z und Z,

$$= \log\alpha + A\log\beta + \lambda\log\gamma.$$

Nachdem durch die Angaben der Ephemeride und durch die Berechnung der Formeln I, II und III die scheinbare Distanz des beobachteten Mondrandes von dem Sterne gefunden ist, bleibt nur noch die im 1sten § durch n' bezeichnete, zu einer Aenderung des Mittagsunterschiedes (m) von einer Zeitsecunde gehörige Veränderung der scheinbaren Distanz D aufzusuchen übrig.

Wenn man diese Veränderung geradezu der Veränderung der wahren Distanz gleichsetzen will, so läſst man dadurch nur den Fehler unverbessert, welcher daraus entstanden ist, daſs die Einwirkungen der Parallaxe und Refraction für den Ort des Mondes berechnet worden sind, welcher der mit dem vorausgesetzten Mittagsunterschiede auf den Meridian der Ephemeride reducirten Beobachtungszeit zugehört, während diese Einwirkungen für den Mondsort berechnet sein sollten, welcher der Beobachtungszeit und dem durch die Beobachtung selbst berichtigten Mittagsunterschiede entspricht. Dieser Fehler beträgt immer nur einen kleinen Theil der gesuchten Verbesserung des Mittagsunterschiedes. Die folgende Differentiirung der scheinbaren Distanz wird das Mittel ihn zu vermeiden ergeben; denn die Bewegung des Mondes ist so langsam, daſs selbst wenn der vorausgesetzte Mittagsunterschied 10 oder 20 Zeitminuten fehlerhaft sein sollte, die von dem Quadrate der Bewegung abhängige Verbesserung noch nicht erheblich werden kann.

Indem die einer kleinen Aenderung des Mondsortes entsprechenden Aenderungen des immer sehr kleinen Einflusses des Quadrates der Refraction, so wie auch der Gröſse k, unbedeutend sind, ist der Ausdruck der scheinbaren Distanz:

$$D = d'' - k\,\mathrm{tang}\,(d'' - H) - K\,\mathrm{tang}\,H$$

nur in Beziehung auf d'' und H zu differentiiren. Man hat also

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}m} = \frac{\mathrm{d}d''}{\mathrm{d}m}\left(1 - \frac{k}{\cos(d''-H)^2}\right) + \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}m}\left(\frac{k}{\cos(d''-H)^2} - \frac{K}{\cos H^2}\right)$$

und da

$$\mathrm{tang}\,H = \mathrm{tang}\,Z\cos P',$$

also H nur mit P' veränderlich ist,

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}m} = \frac{\mathrm{d}d''}{\mathrm{d}m}\left(1 - \frac{k}{\cos(d''-H)^2}\right) - \frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}m}\,\mathrm{tang}\,Z\sin P'\left(\frac{k\cos H^2}{\cos(d''-H)^2} - K\right)$$

Um die Ausdrücke der Differentialquotienten von d'' und P' zu erhalten, muſs man die Formeln II differen tiren; es ist dabei zu bemerken, dafs diese Formeln, wenn man $d_{,} \mp \rho_{,}$ statt $d_{,}$ setzt, fast genau d'' statt d' ergeben, so dafs man, durch diese Aenderung, auch die Veränderlichkeit des scheinbaren Mondshalbmessers berücksichtigt. Diese Differentiation ergiebt (d statt $d_{,} \mp \rho_{,}$ geschrieben)

$$r'\frac{dd''}{dm} = (\sin d \sin d' + \cos d \cos d'' \cos(P' - P_{,}))\frac{dd}{dm}$$
$$+ \sin d \cos d'' \sin(P' - P_{,})\frac{dQ_{,}}{dm}$$
$$r' \sin d'' \frac{dP'}{dm} = -\cos d \sin(P' - P_{,})\frac{dd}{dm} + \sin d \cos(P' - P_{,})\frac{dQ_{,}}{dm}$$

Will man aber im Ausdrucke von n' alles weglassen was in das Quadrat der Mondsparallaxe und in ihr Product in die Strahlenbrechung multiplicirt ist, so hat man, statt der eben gegebenen richtigen Ausdrücke die genäherten;

$$r'\frac{dd'}{dm} = \frac{dd}{dm} + \frac{dQ_{,}}{dm} \sin\pi_{,} \sin Z \sin P' \cos d$$
$$\frac{dP'}{dm} = \frac{dQ_{,}}{dm}$$

und die Vertauschung jener gegen diese wird eben so wenig einen erheblichen Fehler erzeugen, als die Verwechselung von k mit K. Auf diese Art erhält man:

$$\text{(IV)} \ldots n' = \frac{n}{r'}\left\{1 + \frac{dQ_{,}}{dd}\alpha \cos d - \frac{k \sin 1'' (1+\beta)}{\cos(d'-H)^2}\right\}$$

wo α und β, um abzukürzen, für

$$\sin\pi_{,} \sin Z \sin P_{,}$$

und .... $\frac{dQ_{,}}{dd} \tang Z \sin P_{,} \sin d' \sin(d' - 2H)$

geschrieben sind. — In den meisten Fällen wird schon der Ausdruck

$$n' = \frac{n}{r'}\left(1 - \frac{k \sin 1''}{\cos(d'-H)^2}\right)$$

eine hinreichende Annäherung gewähren, denn die daraus weggelassenen, der Veränderung des Positionswinkels proportionalen Glieder, sind immer beträchtlich kleiner als die beibehaltenen und werden dieses desto mehr, je vortheilhafter die Sterne ausgewählt sind, d. h. je näher sie in der Richtung der Bewegung des Mondes liegen.

Bei dieser Gelegenheit erwähne ich des besonderen Falls welchen die Methode der Mondsdistanzen darbieten kann, dafs nämlich die scheinbare Entfernung bis zu einem Maximo wächst und dann wieder abnimmt, also während einer beträchtlichen Zeit ohne merkliche Aenderung bleibt. Dieses kann sich ereignen wenn das Gestirn, dessen Entfernung vom Monde gemessen wird, dem Untergange zugeht, der Mond aber sehr hoch steht; einen vorgekommenen Fall dieser Art hat Herr *Rümker* (Astr. N. Nr. 5) angeführt. — Der eben entwickelte Ausdruck von n' läfst keinen Zweifel darüber, dafs der Mittagsunterschied in diesem Falle eben so gut bestimmt werden kann als in jedem anderen; da dieses aber auch ohne meine Rechnung klar wird, so erwähne ich des Falls nicht sowohl um ihn aufzuklären, als um zu bemerken, dafs die Beobachtung eines solchen Maximums allein, ohne Zuziehung der Zeitbestimmung, den Mittagsunterschied ergiebt. In Fällen wo die Zeitbestimmung nicht sicher ist, wird ihr Fehler desto weniger nachtheilig sein, je langsamer die scheinbare Entfernung sich ändert.

6.

Nachdem ich den einfacheren Fall der Aufgabe vollständig abgehandelt habe, mufs ich noch den zusammengesetzteren betrachten, und annehmen dafs auch das Gestirn mit welchem der Mond verglichen wird eine Parallaxe und einen Halbmesser zeigt. Ich werde dieses Gestirn hier die Sonne nennen, wenn auch das Meiste von dem was ich darüber zu sagen habe, ebensowohl für die Planeten gilt.

Von welchem Punkte des Raumes man auch die Sonne und den Mond sehen möge, so liegen die Oerter derselben und der von dem Monde gesehene Ort der Sonne in einem gröfsten Kreise der Himmelskugel. Den die Richtung vom Monde nach der Sonne bezeichnenden Punkt der Himmelskugel kann man offenbar als den Fixstern ansehen, auf welchen alles Vorige sich bezieht; man kann also die durch die Parallaxe veränderten Entfernungen beider Gestirne von diesem Punkte nach der gegebenen Vorschrift berechnen, und durch den Unterschied derselben die Entfernung des einen von dem anderen ausdrücken. — Auf diese Art wird der zusammengesetztere Fall auf den einfacheren reducirt; der Punkt der Himmelskugel aber, durch welchen dieses erlangt wird, ist derselbe der, wie ich früher gezeigt habe, auch die Theorie der Finsternisse vereinfacht. Ich werde ihn, um abzukürzen, im Folgenden den Punkt S nennen.

Ich werde die Rectascension, Declination und Entfernung des Mondes α, δ, r; der Sonne A, Δ, R bezeichnen: die Entfernungen an der Himmelskugel zwischen dem Punkte S und dem Monde und der Sonne $d + e$ und e. Diese Zeichen gelten für den Mittelpunkt der Erde; sie werden mit einem Comma versehen (z. B. $d_{,} + e_{,}$, $e_{,}$) wenn sie sich auf den Punkt O (§ 2), mit einem Accente (z. B. $d' + e'$, e') wenn sie sich auf den Beobachtungsort beziehen. Die Rectascension und Declination des Punktes S bezeichne ich durch $\bar{A}$ und $\bar{\Delta}$, die Entfernung des Mondes von der Sonne durch $\bar{R}$.

Nach diesen Bezeichnungen werden, in den Formeln (I) des 3ten §, für e und Δ die sich auf den Punkt S

beziehenden Werthe, nämlich der der Rectascension $\overline{A}$ zugehörige Stundenwinkel und die Declination $\overline{\Delta}$ gesetzt. Die Formeln (IIa), welche man nun sowohl für den Mond als für die Sonne anzuwenden hat, werden für den Mond:

$$\begin{aligned} r' \cos(d'+e') &= \cos(d_,+e_,) - \sin\pi_, \cos Z \\ r' \sin(d'+e')\cos(P'-P_,) &= \sin(d_,+e_,) - \sin\pi_, \sin Z \cos P_, \\ r' \sin(d'+e')\sin(P'-P_,) &= \sin\pi_, \sin Z \sin P_, \end{aligned}$$

und für die Sonne:

$$\begin{aligned} R' \cos e' &= \cos e_, - \sin\pi'_, \cos Z \\ R' \sin e' \cos(P'-P_,) &= \sin e_, - \sin\pi'_, \sin Z \cos P_, \\ R' \sin e' \sin(P'-P_,) &= \sin\pi'_, \sin Z \sin P_, \end{aligned}$$

Allein es ist nicht nöthig, die letzteren wirklich unter dieser Form zu berechnen, indem man durch Division derselben durch die ersteren:

$$\frac{R' \sin e'}{r' \sin(d'+e')} = \frac{\sin\pi'_,}{\sin\pi_,} = \frac{\sin e_, - \sin\pi'_, \sin Z \cos P_,}{\sin(d_,+e_,) - \sin\pi_, \sin Z \cos P_,}$$

hat, woraus die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin e_, \sin\pi_, &= \sin(d_,+e_,)\sin\pi'_, \\ R' \sin e' \sin\pi_, &= r' \sin(d'+e')\sin\pi'_, \end{aligned}$$

hervorgehen, welche, verglichen mit der ersten Formel für beide Gestirne,

$$\begin{aligned} R' \cos e' &= \frac{\sin d_, + r' \cos(d'+e') \sin e_,}{\sin(d_,+e_,)} \\ R' \sin e' &= \frac{r' \sin(d'+e') \sin e_,}{\sin(d_,+e_,)} \end{aligned}$$

ergeben. Eine zweite, gleichfalls einfache Formel zur Bestimmung von e', nämlich

$$R' \sin e' = \frac{\sin P_,}{\sin P'} \sin e_,$$

erhält man, wenn man den aus der Verbindung der beiden letzten Gleichungen folgenden Ausdruck

$$\sin e_, \sin(P'-P_,) = \sin\pi'_, \sin Z \sin P'$$

mit der letzten Gleichung vergleicht.

Nachdem hierdurch die Vorschrift zur Erfindung der scheinbaren Distanz d' gegeben ist, kömmt es noch darauf an, die Werthe von $\overline{A}$, $\overline{\Delta}$ und $e_,$, welche dieselbe voraussetzt, zu bestimmen. Diese Bestimmung gründet sich auf die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \overline{R} \cos\overline{\Delta} \cos\overline{A} &= R \cos\Delta \cos A - r \cos\delta \cos\alpha \\ \overline{R} \cos\overline{\Delta} \sin\overline{A} &= R \cos\Delta \sin A - r \cos\delta \sin\alpha \\ \overline{R} \sin\overline{\Delta} &= R \sin\Delta - r \sin\delta \end{aligned}$$

oder, wenn man R zur Einheit annimmt,

$$\begin{aligned} \overline{R} \cos\overline{\Delta} \cos\overline{A} &= \cos\Delta \cos A - m \cos\delta \cos\alpha \\ \overline{R} \cos\overline{\Delta} \sin\overline{A} &= \cos\Delta \sin A - m \cos\delta \sin\alpha \\ \overline{R} \sin\overline{\Delta} &= \sin\Delta - m \sin\delta \end{aligned}$$

wo m für $\frac{\sin\pi'}{\sin\pi}$ geschrieben ist. Wenn man die hieraus hervorgehenden Werthe von $\overline{\Delta}$ und $\overline{A}$, statt Δ und A in die Formeln setzt, durch welche im 2ten § d und Q ausgedrückt sind, so ergeben dieselben Formeln nun $d+e$ und Q, und die oben gefundene Gleichung zwischen $e_,$ und $d_,+e_,$, oder vielmehr die ähnliche, auf den Mittelpunkt der Erde bezogene, giebt

$$\sin e = m \sin(d+e)$$

Hierdurch ist alles Erforderliche geleistet. Allein da es einerseits ein Interesse hat, die Kleinheit von m zur Ableitung bequemerer Rechnungsvorschriften zu benutzen, andrerseits aber gewünscht werden muſs, die Distanz d, wegen ihres unmittelbaren Einflusses auf das Resultat, in aller Schärfe aus der Rechnung hervorgehen zu sehen, so ist es zweckmäſsiger, zuerst d und den Positionswinkel des Mondes am Mittelpunkte der Sonne, welchen ich durch ψ bezeichnen werde, durch die trigonometrischen Formeln zu berechnen, und dann e, Q, $\overline{A}$ und $\overline{\Delta}$ nach den Näherungsformeln. Man rechnet also zuerst nach den Formeln:

$$\begin{aligned} \cos d &= \sin\Delta \sin\delta + \cos\Delta \cos\delta \cos(\alpha - A) \\ \sin d \cos\psi &= \cos\Delta \sin\delta - \sin\Delta \cos\delta \cos(\alpha - A) \\ \sin d \sin\psi &= \cos\delta \sin(\alpha - A) \end{aligned}$$

und wendet dann die Näherungen

$$\begin{aligned} e &= \frac{\pi'}{\sin\pi} \sin d \\ Q &= \psi - e \sin\psi \tan\Delta \\ \overline{A} &= A - e \sin\psi \sec\Delta \\ \overline{\Delta} &= \Delta - e \cos\psi \end{aligned}$$

an.

Die Reduction von $d+e$ und Q auf den Punkt O, und den Werth von $\log\frac{r}{r_,}$ findet man wie im 2ten §, indem man nämlich

$$\frac{\sin\varphi}{\sqrt{[1 - ee \sin\varphi^2]}}$$

resp. in

$$\begin{aligned} &-\omega \,.\, ee \sin\pi\,(\sin\overline{\Delta} \sin(d+e) - \cos\overline{\Delta} \cos(d+e) \cos Q) \\ &-\omega \,.\, ee \sin\pi \,.\, \frac{\cos\overline{\Delta} \sin Q}{\sin(d+e)} \\ &-43429\, ee \sin\pi \sin\delta \end{aligned}$$

multiplicirt. Der Vollständigkeit wegen bemerke ich, daſs der Factor für die ähnliche Reduction von e sich in

$$\omega \,.\, ee \sin\pi' \,.\, \cos\Delta \cos\psi$$

zusammenzieht und der von $\log\frac{R}{R_,}$

$$-43429\, ee \sin\pi' \sin\Delta$$

wird. Die aus dem ersten entstehende Reduction beträgt aber nie mehr als einige Hundertel einer Secunde, der Einflufs des letzteren ist noch kleiner, weshalb ich von beiden keinen Gebrauch machen werde.

Die Ephemeride mufs, für die Distanzen des Mondes von der Sonne, eine Columne mehr besitzen als für die Distanzen von Fixsternen, nämlich die Columne für den Ergänzungsbogen e. Die Reduction der Wahren Zeit, oder $A - \bar{A}$ beträgt hier immer weniger als eine Zeitminute. — Von diesem Falle der Ephemeride gebe ich hier gleichfalls ein Beispiel. Es gilt für dieselben Zeiten für welche ich im 2ten § gerechnet habe und beruhet auf folgenden, aus dem Naut. Alm. entlehnten Angaben für den Mond und die Sonne:

	α	δ	π	A	Δ	π'
h	° ′ ″	° ′ ″	′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″
Juni 2. 12	336 6 24,00	—10 50 58,00	56 44,90	70 5 23,25	+22 11 48,94	8,45
15	337 41 26,98	—10 23 17,86	56 49,86	70 13 4,14	12 47,28	8,45
18	339 16 32,62	— 9 55 4,00	56 55,81	70 20 45,15	13 45,23	8,45
21	340 51 41,70	— 9 26 17,38	57 1,86	70 28 26,27	14 42,80	8,45
3. 0	342 26 55,00	— 8 56 59,00	57 8,00	70 36 7,50	15 40,00	8,45

W. Z. Greenw.	Distanz.	Log. Corr.	Positionswinkel	Log. Corr.	Log. sin. Hor P.	Log. Halbm.	Log Corr.	Reduct der W. Z.	Verbesserte Decl. der Sonne.	Ergänzungsbogen.
h	° ′ ″		° ′ ″					″	° ′ ″	′ ″
Juni 2. 12	97 43 0,4	0,906 n	261 26 16	1,321	8,21754	2,96734	9,953	— 36,1	+22 13 5	8 27,4
15	96 13 6,2	0,913 n	261 20 50	1,321	8,21829	2,96808	9,935	— 36,2	14 4	8 28,2
18	94 42 51,8	0,919 n	261 15 24	1,320	8,21905	2,96884	9,916	— 36,2	15 3	8 28,6
21	93 12 16,7	0,926 n	261 10 0	1,319	8,21982	2,96961	9,896	— 36,2	16 1	8 28,6
3. 0	91 41 20,7	0,931 n	261 4 36	1,319	8,22060	2,97039	9,872	— 36,2	16 59	8 28,2

Wenn man eine Ephemeride von dieser Einrichtung besitzt, so unterscheiden sich die Berechnungen der durch die Parallaxe veränderten Distanz d' für einen Fixstern und für die Sonne nur darin, dafs in dem letzteren Falle die aus der Ephemeride genommene Distanz, vor ihrer Anwendung, um den Ergänzungsbogen vergröfsert, und von dem dadurch, nach einer der Vorschriften des § 3 erlangten Werthe von $d' + e'$, e' abgezogen wird, welches man aus einer der oben gegebenen Formeln:

$$e' = \frac{r' \sin(d' + e')}{\sin(d_, + e_,)}\, e_, = \frac{\sin P_,}{\sin P'}\, e_,$$

findet. Wenn man die Vergröfserung des Sonnenhalbmessers nicht berücksichtigen will, ist die Aufsuchung von R' unnöthig.

Die Berechnung der Einwirkung der Strahlenbrechung erleidet in dem hier betrachteten Falle auch eine kleine Aenderung. Es wird nämlich stets die Entfernung der nächsten Ränder des Mondes und der Sonne gemessen, deren Entfernungen von dem Punkte S resp. $d' + e' - \rho'$ und $h + e'$ sind (h = Halbmesser der Sonne): die Formel (III) wäre daher auf diese beiden Entfernungen anzuwenden. Allein aus dem im 4ten § über den Einflufs der Mondsscheibe auf die Strahlenbrechung Gesagten, gehet hervor, dafs dieser Einflufs auf die Entfernung der nächsten Ränder des Mondes und der Sonne, von dem Unterschiede der Einflüsse auf die beiden Entfernungen $d' + e' - \rho'$ und $h + e'$ nicht merklich verschieden ist, so dafs dieser Unterschied geradezu das Gesuchte ist. Bezeichnet man den zu dem beobachteten Punkte des Sonnenrandes gehörigen Werth von K durch K', und $d' - \rho' - h$ durch d'', so erhält man, wie im 4ten §.

$$\text{(III)}\quad D = d'' - k \tan(d'' + e' + h - H) - K' \tan(H - e' - h)$$
$$- \sin 1'' \left\{\frac{\tan Z \sin P' \cos H}{\cos(d'' + e' + h - H)\cos(H - e' - h)}\right\}^2$$
$$\times \left\{kk \sin 2(H - e' - h) + K'K' \sin 2(d'' + e' + h - H)\right\}$$

Der hier vorkommende Werth von K' gehört zu der wahren Zenithdistanz des beobachteten Punktes am Sonnenrande, deren Cosinus den Ausdruck:

$$\cos Z \cos(h + e') + \sin Z \sin(h + e') \cos P'$$

hat, oder welche, mit hinreichender Annäherung

$$= Z - (h + e') \cos P'$$

ist.

7.

Die Berechnung beobachteter Entfernungen des Mondes von den Planeten ist der im vorigen § auf die Sonne bezogenen ganz gleich und darf daher nicht weiter abgehandelt werden. Jedoch erfordert die theilweise Erleuchtung der Planeten Venus und vielleicht auch Mars, dafs die Ephemeride nicht für die Mittelpunkte derselben berechnet werde. Die Fernröhre der Reflexions-Instrumente sind nämlich meistens zu schwach um die theilweise erleuchtete Figur so deutlich zu zeigen, dafs ein bestimmter Theil, namentlich der erleuchtete Rand derselben, gehörig unterschieden und mit dem erleuchteten Mondrande, durch Reflexion in Berührung gebracht werden könnte. Vielmehr zeigen diese

Fernröhre nur ein unförmliches Licht, und man kann dann nichts anderes beobachten als die Entfernung der Mitte desselben vom erleuchteten Mondrande. Die Ephemeride muſs daher für diese Mitte berechnet werden, und hier entsteht die Frage, welcher Punkt der Planetenscheibe, statt des Mittelpunkts derselben, der Berechnung der Ephemeride zum Grunde gelegt werden müsse? —

Meiner Meinung nach sollte dieses der Schwerpunkt des erleuchteten Theils der Planetenscheibe sein; denn wenn dieser, durch Reflexion auf den Mondrand gebracht ist, scheint mir das Licht innerhalb und auſserhalb der Mondsscheibe einen gleich starken Eindruck auf das Auge machen zu müssen. Ich werde daher hier die Formeln angeben, durch welche die Rectascension und Declination dieses Schwerpunktes berechnet werden können.

Die Rectascension und Declination des Mittelpunktes des Planeten bezeichne ich durch A und Δ, des gesuchten Schwerpunktes seines erleuchteten Theils durch A' und Δ', der Sonne durch a und d; ferner den Winkel am Planeten durch u, an der Erde durch ν; die Entfernungen des Planeten von der Sonne und Erde durch r und r', der Erde von der Sonne durch R; den Positionswinkel der Sonne am Planeten durch p; den Winkel unter welchem der Halbmesser des Planeten in der Entfernung $= 1$ erscheint durch h. Nach diesen Bezeichnungen hat man ($\pi = 3{,}141\ldots$)

$$A' = A - \frac{8h}{3\pi r'} \sin \tfrac{1}{2}u^2 \sin p \sec\Delta$$

$$\Delta' = \Delta + \frac{8h}{3\pi r'} \sin \tfrac{1}{2}u^2 \cos p$$

Die hier vorkommenden u und p werden aus den Formeln

$$\cos\nu = \sin d \sin\Delta + \cos d \cos\Delta \cos(A-a)$$

$$\sin\nu \cos p = \sin d \cos\Delta - \cos d \sin\Delta \cos(A-a)$$

$$\sin\nu \sin p = \cos d \sin(A-a)$$

und

$$r \cos u = r' - R\cos\nu; \quad r \sin u = R \sin\nu$$

gefunden.

8.

Ich kehre nun zu der Berechnungsart der gemessenen Distanzen zurück. In dem Vorhergehenden habe ich sie so entwickelt daſs sie zum Ziele führt, d. h. den einer Beobachtung wirklich entsprechenden Mittagsunterschied ergiebt. Um dieses Ziel zu erreichen habe ich auch Umstände berücksichtigt, welche, wenn man das Resultat einer Beobachtung, und nicht eine vollständige Theorie der beobachteten Erscheinung sucht, füglich unberücksichtigt bleiben können. — Dahin gehören die Reductionen des Positionswinkels, der Horizontal-Parallaxe und des Horizontal-Halbmessers auf den Punkt O, zu deren Erlangung die (§ 2 und 7) mitgetheilten Proben einer Ephemeride besondere Columnen enthalten. Unterläſst man diese Reductionen so begeht man Fehler, welche aber, wegen der ersten, die scheinbare Distanz (für $\pi = 57'\,30''$) stets um weniger als

$$0''38 \sin\varphi \frac{\sin z \sin p'}{\tang d},$$

und wegen der letzten die Horizontal-Parallaxe und den Halbmesser um weniger als

$$0''18 \sin\varphi \text{ und } 0''05 \sin\varphi$$

ändern. Man erspart dadurch die beiden, dieser Reductionen wegen der Ephemeride hinzugefügten Columnen, und die Berücksichtigung der Abplattung der Erde zieht sich auf die Reduction der Distanz auf den Punkt O, und auf die Addition des aus der Taf. I ohne Mühe zu entnehmenden Logarithmen zu $l.\sin\pi$ zusammen. — Ferner gehört hierher das letzte Glied der für den Einfluſs der Strahlenbrechung entwickelten Formel (III): dieses Glied verschwindet wenn beide Gestirne gleiches Azimuth, und wird am gröſsten wenn sie gleiche Zenithdistanz haben, in welchem Falle sein Ausdruck:

$$-\frac{kk}{\omega} \tang Z^2 \tang \tfrac{1}{2}d'' + \frac{kk}{\omega} \tan \tfrac{1}{2}d''^3,$$

und sein Werth für verschiedene Zenithdistanzen:

60°	$-\ 0''048 \tang \tfrac{1}{2}d'$	$+\ 0''016 \tang \tfrac{1}{2}d'^3$
65	$-\ 0{,}073$	$+\ 0{,}016$
70	$-\ 0{,}119$	$+\ 0{,}016$
75	$-\ 0{,}216$	$+\ 0{,}016$
80	$-\ 0{,}477$	$+\ 0{,}015$
85	$-\ 1{,}584$	$+\ 0{,}012$

wird. Man sieht hieraus, daſs dieses Glied erst in Zenithdistanzen einigermaſsen merklich werden kann, in welchen der Mondrand, wegen seiner Nähe am Horizonte, schon seine scharfe Begrenzung verloren hat; es ist übrigens stets kleiner als die durch die meteorologischen Instrumente nicht erkennbaren Aenderungen der Strahlenbrechung, welche den gröſsten Einfluſs auf die Distanz erhalten wenn dieses Glied verschwindet. — Endlich bemerke ich, daſs die Zahl n', zu deren Berechnung der 5te § die Anweisung ertheilt, mit desto geringerer Genauigkeit gesucht werden darf, je näher die berechnete scheinbare Distanz der beobachteten kömmt, oder je kleiner der Fehler des vorausgesetzten Mittagsunterschiedes ist: nimmt man geradezu n, die Veränderung der wahren Distanz, dafür an, so wird der daraus entstehende Fehler selten den sechszigsten, nie den dreiſsigsten Theil der aus der Beobachtung hervorgehenden Verbesserung des Mittagsunterschiedes betragen; die Abkürzung des Ausdrucks, nämlich:

$$n' = \frac{n}{r'}\left(1 - \frac{k \sin 1''}{\cos(d'-H)^2}\right)$$

oder auch

$$n' = n\left\{1 + \sin\pi, \cos z - \frac{k\sin 1''}{\cos(d'-H)^2}\right\}$$

führt der Wahrheit in allen Fällen weit näher, und ich glaube nicht, dafs es ein Interesse haben wird über diesen Ausdruck hinauszugehen. Indem die älteren Methoden nicht vorschreiben, den Ort des Mondes der der Berechnung seiner Zenithdistanz zum Grunde liegt, nach der Berichtigung des angenommenen Mittagsunterschiedes noch einmahl zu suchen und damit die Rechnung zu wiederholen, begehen sie genau denselben Fehler, welchen die Voraussetzung $n' = n$ verursachen würde.

9.

Wenn es darauf ankäme geübten Rechnern eine Rechnungsvorschrift zu liefern, so würde ich glauben, es bei der vorgetragenen und etwa dem Vorschlage, die eben namhaft gemachten Umstände nicht zu berücksichtigen, bewenden lassen zu können. Allein wenn die Absicht ist, die Rechnung von jeder Operation zu befreien, durch deren Weglassung nicht eine für den Zweck des Seefahrers wesentliche Ungenauigkeit des Resultats entsteht, so kann man sie noch vollständiger erreichen. Ich glaube wirklich dafs die Verminderung der Zahl der Operationen eben so wesentlich ist als die Verminderung der Mühe welche sie verursachen, denn mit jeder derselben verschwindet die Möglichkeit, in ihrer Ausführung einen Irrthum zu begehen.

Eine Abkürzung der Rechnung geht aus der Betrachtung hervor, dafs es fast gleichgültig ist, ob man die durch die Parallaxe veränderte Distanz des Mondsmittelpunkts von dem Sterne aus der wahren berechnet und dann, um die Distanz des Randes zu erhalten, um den scheinbaren Halbmesser des Mondes vermindert oder vermehrt, oder ob man den Halbmesser des Mondes am Anfange berücksichtigt, d. i. von der wahren, um den wahren Halbmesser verminderten oder vermehrten Distanz ausgeht und die Veränderung derselben durch die Parallaxe untersucht. Richtig ist dieses nicht, weil der Punkt der Mondsoberfläche, welcher von dem Mittelpunkte der Erde gesehen in dem gröfsten Kreise nach dem Sterne und am Rande des Mondes liegt, von dem Beobachtungsorte gesehen weder in der Richtung nach dem Sterne, noch am Rande erscheint. Allein die Entfernung dieses Punktes von dem am Beobachtungsorte in der Richtung nach dem Sterne, am Rande erscheinenden, ist im Sinne der Distanz stets kleiner als

$$0''15\,\frac{\sin z^2}{\sin d^2}$$

und in der darauf senkrechten Richtung etwa

$$= 15''7\,\frac{\sin z\,\sin p'}{\tan d},$$

und diese letzte Entfernung erhält nur dadurch Einflufs, dafs die Strahlenbrechung für den Mond, für einen Punkt in Rechnung gebracht wird, welcher von dem Punkte für welchen sie in Rechnung gebracht werden sollte diese kleine Entfernung besitzt. Da bei den Anwendungen der Mondsmethode Distanzen von weniger als 30° meistens vermieden werden und gewöhnlich weit gröfsere vorkommen, so ist der Verlust an Genauigkeit, welchen die Verwechselung beider Punkte verursacht, nie beträchtlich und meistens ganz unbedeutend.

Dieser Aenderung zufolge bedeutet nun, in den Formeln des 3ten §, d, die schon um den Halbmesser ρ, verminderte oder vermehrte Distanz für den Punkt O, und d' die scheinbare Distanz des Mondsrandes von dem Sterne. Man kann die erstere unmittelbar in der Ephemeride angeben, nämlich durch Columnen für

$$d\mp\rho \text{ und } -\omega.ss\sin\pi\left\{\sin\Delta\sin(d\mp\rho)-\cos\Delta\cos(d\mp\rho)\cos Q\right\},$$

wodurch denn sowohl die Angabe des Mondshalbmessers als seine Berücksichtigung in der Rechnung gänzlich wegfällt.

Die auf diese Art abgeänderte Probe der Ephemeride (§ 2) lasse ich hier folgen. Der Columne für die Distanz habe ich noch den Logarithmen ihrer Veränderung in einer Secunde (n) beigefügt. Dieser wird nicht nur am Ende der Rechnung gebraucht, sondern er dient auch am Anfange derselben, zur möglichst leichten Erfindung der Distanz für die auf den Meridian der Ephemeride reducirte Beobachtungszeit: man sucht ihn nämlich für diese Zeit und fügt die halbe Summe desselben und des in der Ephemeride enthaltenen unmittelbar vorhergehenden, ähnlichen Logarithmen, zu dem Logarithmen der Zeit, von der vorhergehenden Zeit der Ephemeride angerechnet, wodurch man den Log. der Veränderung der Distanz, mit gehöriger Rücksicht auf die zweite Differenz, erhält.

Entfernung α Arietis vom nächsten Mondrande.

W. Z. Greenw.	Distanz.	Log. Veränd f. 1'	Log. Corr.	Positionswinkel.	Log. sin Hor. P.	Red. der W. Z.	Decl. d. Sterns.
h	° ′ ″			° ′ ″		h ′ ″	
Juni 2. 12	61 46 14,4	9,71401	1,085n	243 5 14	8,21754	2 42 42,0	+22° 39′ 25″
15	60 12 58,2	9,71491	1,093n	242 33 0	8,21829	43 12,7	
18	58 39 30,7	9,71576	1,101n	241 59 38	8,21905	43 43,4	
21	57 5 52,5	9,71657	1,108n	241 25 2	8,21982	44 14,2	
3. 0	55 32 4,1	9,71734	1,116n	240 49 5	8,22060	44 44,9	

Für die Entfernungen des Mondes von der Sonne (oder einem Planeten) kann der Ephemeride dieselbe Einrichtung gegeben werden, so daſs sie unmittelbar die geocentrische Entfernung der Ränder enthält. Dadurch wird nöthig, daſs der Punkt S (§ 6) nicht auf den Mittelpunkt der Sonne, sondern auf den Punkt ihres Randes bezogen werde, welcher in der Richtung von ihrem Mittelpunkte nach dem Monde liegt; oder daſs man, nachdem d und ψ den Formeln des 6ten § gemäſs berechnet worden sind, zur Erfindung von e, Q, $\overline{A}$, $\overline{\Delta}$ die Näherungsformeln:

$$e = \frac{\pi'}{\sin\pi} \sin(d-h)$$
$$Q = \psi + (h-e)\sin\psi \tang\Delta$$
$$\overline{A} = A + (h-e)\sin\psi \sec\Delta$$
$$\overline{\Delta} = \Delta + (h-e)\cos\psi$$

anwende. Die Columnen für die Distanz und ihre Reduction auf den Punkt O enthalten:

$$d-\rho-h \quad \text{und} \quad -\omega.\varepsilon\varepsilon \sin\pi\,[\sin\overline{\Delta}\,\sin(d-\rho-h+e) - \cos\overline{\Delta}\,\cos(d-\rho-h+e)\cos Q]$$

bei welcher Einrichtung dem Rechner die Kenntnis beider Halbmesser unnöthig wird. — Die auf diese Art abgeänderte Ephemeride des § 6 setze ich gleichfalls hierher. Der dazu angewandte Halbmesser der Sonne ist aus der XII Taf. der Tab. Regiom. genommen. Den Ergänzungsbogen e habe ich nur in ganzen Secunden angegeben, indem nur seine Veränderung durch die Parallaxe Einfluſs auf das Resultat erhält, welcher durch die Brüche der Secunde nicht merklich geändert werden kann.

Entfernung der nächsten Ränder der Sonne und des Mondes.

W. Z. Greenwich.	Distanz.	Log. Veränd. für 1″	Log. Corr	Positionswinkel.	Log sin Hor. P.	Reduct. W. Z.	Verbess. Decl. der Sonne.	Erg.-bog.
h	° ′ ″			° ′ ″			° ′ ″	′ ″
Juni 2.12	97 11 45,9	9,69782	0,907 n	261 19 54	8,21754	+31,3	+22 10 43	8 28
15	95 41 50,1	9,69944	0,914 n	261 14 27	8,21829	+31,2	11 41	8 28
18	94 11 34,1	9,70109	0,920 n	261 9 2	8,21905	+31,2	12 38	8 29
21	92 40 57,3	9,70275	0,926 n	261 3 37	8,21982	+31,2	13 35	8 29
3. 0	91 9 59,6	9,70444	0,932 n	260 58 13	8,22060	+31,2	14 32	8 28

Eine zweite Abkürzung kann man bei der Berechnung des Einflusses der Refraction anbringen. Daſs die im 4ten § mitgetheilte Tafel eine Decimalstelle verlieren könne sieht man sogleich, und eben so bemerkt man leicht, daſs der Factor welcher in dem von den Barometerstande abhängigen Logarithmen von β zu multipliciren ist, für die gegenwärtige Anwendung mit 1 verwechselt, oder weggelassen werden darf; denn bei einer Zenithdistanz von 80° kann er die Strahlenbrechung, in den Grenzen der Barometerstände nicht mehr als 0″05, und bei 85° nur um 0″4 ändern. Der Factor des von dem Thermometerstande abhängigen Logarithmen von γ erlangt aber gröſseren Einfluſs, der, wenn der Thermometerstand 40° Fahrenh. von dem Stande für welchen die Tafel gilt verschieden ist, in den Zenithdistanzen 70°, 75°, 80°, 85°.... 0″1, 0″3, 0″8, 3″8 beträgt. Ich glaube aber dennoch, daſs man den Seefahrern die Berücksichtigung dieses Factors ersparen sollte; wenn auch die Mühe ihn zu berücksichtigen gänzlich unbedeutend ist, so erspart man durch seine Weglassung eine Vorschrift und eine Operation.

Eine nicht ganz unbeträchtliche Erleichterung der Rechnung würde man erlangen, wenn man k ohne Rücksicht auf die Zenithdistanz des Mondes, etwa so wie es für die Zenithdistanz 45° ist, annehmen könnte. Dann würde die Aufsuchung jener Zenithdistanz ganz erspart und man brauchte nur den Winkel H. Dieses ist wirklich eine starke Annäherung an die Wahrheit wenn der Mond hoch steht; auch noch für die Zenithdistanzen 55°, 60°, 65°, 70° beträgt der aus der Veränderung von k entstehende Unterschied der Strahlenbrechungen nur 0″1, 0″3, 0″6, 1″5. Man könnte diese Annäherung für die Fälle wo der Mond 25° über dem Horizonte, oder höher steht, anzuwenden vorschlagen, allein da sie für geringere Höhen beträchtliche Fehler erzeugen würde, und die Berechnung der Zenithdistanz, wozu man alles Erforderliche schon besitzt, nur sehr geringe Mühe verursacht, so ist es vielleicht zweckmäſsiger, es bei einer auf alle Fälle anwendbaren Vorschrift bewenden zu lassen. Uebrigens ist, wegen der Kleinheit der Aenderung welche k durch eine Aenderung der Zenithdistanz erfährt, eine ohngefähre Berechnung derselben immer hinreichend.

Ueber die Einwirkung der Strahlenbrechung auf Distanzen des Mondes von der Sonne bemerke ich noch, daſs nach der oben vorgeschlagenen unmittelbaren Beziehung derselben auf den Sonnenrand, der Halbmesser der Sonne aus der Formel III (§ 6) weggelassen und dieselbe

$$D = d' - k\,\tang(d'+e'-H) - K\,\tang(H-e')$$

gelesen werden muſs. K' wird mit desto gröſserem Rechte mit dem für die Zenithdistanz Z geltenden K verwechselt werden können, je kleiner der Unterschied dieser Zenithdistanz und

$$Z - e'\cos P'$$

für welche K' genommen werden sollte, durch die Beziehung des Punktes S auf den Rand der Sonne geworden ist.

(Der Beschluſs folgt.)

Ausgegeben 1832. Februar 7.

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

№. 220.

Neue Berechnungsart für die nautische Methode der Mondes-Distanzen.

Von Herrn Professor und Ritter *Bessel.*

(Beschluſs.)

10.

Ich werde nun alle Operationen, welche man machen muſs um das Resultat einer beobachteten Entfernung des Mondes von einem Fixsterne oder von der Sonne oder einem Planeten zu erhalten, zusammenstellen und vollständige Rechnungsbeispiele für beide Fälle hinzufügen. Ich richte beides den Formeln (II[a]) § 3 gemäſs ein, weil nicht-logarithmische Sinustafeln allgemeiner verbreitet sind als ähnliche Tafeln für die Tangenten.

A. Distanz des Mondes von einem Sterne.

Nachdem man aus der Ephemeride (§ 9) für die Greenwicher W. Z. $= T+m$ die Zahlen ihrer 7 Columnen genommen und daraus $d_,$, $log\,n$, Q, $log\,sin\,\pi_,$ und den Stundenwinkel des Sterns abgeleitet hat, berechnet man

I. den parallactischen Winkel und die Zenithdistanz des Sterns:

$$a = cos\,\varphi\ sin\,t;$$

$$f\,sin\,F = cos\,\varphi\ cos\,t; \quad tang Z\,cos\,q = cotg(F+\Delta)$$

$$f\,cos\,F = sin\,\varphi; \quad tang Z\,sin\,q = \frac{a}{f}\,cosec(F+\Delta)$$

II. die von der Parallaxe geänderte Distanz des Mondrandes vom Sterne d'' und den Winkel am Sterne P':

$$P_, = Q - q$$

$$r'\ cos\,d'' = cos\,d_, - sin\,\pi_,\ cos\,Z$$

$$r'\ sin\,d''\ cos(P'-P_,) = sin\,d_, - sin\,\pi_,\ sin\,Z\ cos\,P_,$$

$$r'\ sin\,d''\ sin(P'-P_,) = sin\,\pi_,\ sin\,Z\ sin\,P_,$$

III. die scheinbare Distanz D:

$$tang\,H = tang\,Z\ cos\,P'$$

$$cos\,z = \frac{cos\,Z}{cos\,H}\,cos(d''-H)$$

k und K aus z und Z und den Angaben der meteorologischen Instrumente

$$D = d'' - k\,tang(d''-H) - K\,tang\,H$$

IV. die wahre Meridiandifferenz

$$m + x = m + \frac{D'-D}{n'}$$

wobei, wenn x nicht etwa sehr groſs ist, n' mit n, dessen Logarithmen die Ephemeride angiebt, verwechselt werden kann.

B. Distanz des Mondes von der Sonne oder einem Planeten.

Die Ephemeride (§. 9) ergiebt für die Zeit $T+m$

$$d_,,\quad log\,n,\quad Q,\quad log\,sin\,\pi_,,\quad e;$$

die Rechnung ist:

I. wie vorher, allein sie wird mit der in der Ephemeride enthaltenen verbesserten Declination geführt.

II. statt $d_,$ wird $d_,+e$ angewandt, wodurch $d''+e'$ statt d'' gefunden wird; das hiervon abzuziehende e' ist

$$= e\,\frac{r'\ sin(d''+e')}{sin(d_,+e)}$$

III. die scheinbare Distanz D:

$$tang\,H = tang\,Z\ cos\,P'$$

$$cos\,z = \frac{cos\,Z}{cos\,H}\,cos(d''+e'-H)$$

$$D = d'' - k\,tang(d''+e'-H) - K\,tang(H-e')$$

IV. wie vorher.

Die beiden Beispiele welche ich hier folgen lasse, sind fingirt.

A. 1831 Juni 2. 14h 24′ 10″ W. Z. ist die Entfernung α Arietis vom nächsten Mondrande $= 61°\ 19'\ 30''$ gemessen. Das Barometer zeigte 30,3 Zoll Engl., das daran befindliche Thermometer 68° F., die Temperatur der Luft war 65° F. Die Breite des Beobachtungsortes ist 54° 42′ 50″ N.; sein geschätzter Mittagsunterschied 1h 22′ Ost von Greenwich.

Ephemeride.

	I	II	III.	IV	V	VI	VII
	° ′ ″			° ′ ″		h ′ ″	° ′ ″
12h	61 46 14,4	9,71401	1,085n	243 5 14	8,21754	2 42 42,0	+22 39 25
1h 2′ 10″	−32 11,4	+31	+3	−11 0	+26	+10,6	—
	61 14 3,0	9,71432	1,088n	242 54 14	8,21780	2 42 52,6	+22 39 25
	−10,0	9,71417	9,912		+97	14 24 10,0	
$d_, =$	61 13 53,0	3,57171	1,000n	$l.\,sin\,\pi_, =$	8,21877	17 7 2,6	
		3,28588			$t =$	256°45′39″	

Für die Entfernungen des Mondes von der Sonne (oder einem Planeten) kann der Ephemeride dieselbe Einrichtung gegeben werden, so dafs sie unmittelbar die geocentrische Entfernung der Ränder enthält. Dadurch wird nöthig, dafs der Punkt S (§ 6) nicht auf den Mittelpunkt der Sonne, sondern auf den Punkt ihres Randes bezogen werde, welcher in der Richtung von ihrem Mittelpunkte nach dem Monde liegt; oder dafs man, nachdem d und ψ den Formeln des 6ten § gemäfs berechnet worden sind, zur Erfindung von e, $\underline{Q}$, $\overline{A}$, $\overline{\Delta}$ die Näherungsformeln:

$$\begin{aligned} e &= \frac{\pi'}{\sin\pi} \sin(d-h) \\ \underline{Q} &= \psi + (h-e)\sin\psi \tang\Delta \\ \overline{A} &= A + (h-e)\sin\psi \sec\Delta \\ \overline{\Delta} &= \Delta + (h-e)\cos\psi \end{aligned}$$

anwende. Die Columnen für die Distanz und ihre Reduction auf den Punkt O enthalten:

$$d-\rho-h \quad \text{und} \quad -\omega\,.\,\varepsilon\varepsilon \sin\pi\,[\sin\overline{\Delta}\,\sin(d-\rho-h+e) - \cos\overline{\Delta}\,\cos(d-\rho-h+e)\cos Q]$$

bei welcher Einrichtung dem Rechner die Kenntnis beider Halbmesser unnöthig wird. — Die auf diese Art abgeänderte Ephemeride des § 6 setze ich gleichfalls hierher. Der dazu angewandte Halbmesser der Sonne ist aus der XII Taf. der Tab. Regiom. genommen. Den Ergänzungsbogen e habe ich nur in ganzen Secunden angegeben, indem nur seine Veränderung durch die Parallaxe Einflufs auf das Resultat erhält, welcher durch die Brüche der Secunde nicht merklich geändert werden kann.

Entfernung der nächsten Ränder der Sonne und des Mondes.

W. Z. Greenwich.	Distanz.	Log. Veränd. für 1″	Log. Corr	Positionswinkel.	Log sin Hor. P.	Reduct. W. Z.	Verbess. Decl. der Sonne.	Erg.-bog.
h	° ′ ″			° ′ ″			° ′ ″	′ ″
Juni 2.12	97 11 45,9	9,69782	0,907n	261 19 54	8,21754	+31,3	+22 10 43	8 28
15	95 41 50,1	9,69944	0,914n	261 14 27	8,21829	+31,2	11 41	8 28
18	94 11 34,1	9,70109	0,920n	261 9 2	8,21905	+31,2	12 38	8 29
21	92 40 57,3	9,70275	0,926n	261 3 37	8,21982	+31,2	13 35	8 29
3. 0	91 9 59,6	9,70444	0,932n	260 58 13	8,22060	+31,2	14 32	8 28

Eine zweite Abkürzung kann man bei der Berechnung des Einflusses der Refraction anbringen. Dafs die im 4ten § mitgetheilte Tafel eine Decimalstelle verlieren könne sieht man sogleich, und eben so bemerkt man leicht, dafs der Factor welcher in dem von den Barometerstande abhängigen Logarithmen von β zu multipliciren ist, für die gegenwärtige Anwendung mit 1 verwechselt, oder weggelassen werden darf; denn bei einer Zenithdistanz von 80° kann er die Strahlenbrechung, in den Grenzen der Barometerstände nicht mehr als 0″05, und bei 85° nur um 0″4 ändern. Der Factor des von dem Thermometerstande abhängigen Logarithmen von γ erlangt aber gröfseren Einflufs, der, wenn der Thermometerstand 40° Fahrenh. von dem Stande für welchen die Tafel gilt verschieden ist, in den Zenithdistanzen 70°, 75°, 80°, 85°.... 0″1, 0″3, 0″8, 3″8 beträgt. Ich glaube aber dennoch, dafs man den Seefahrern die Berücksichtigung dieses Factors ersparen sollte; wenn auch die Mühe ihn zu berücksichtigen gänzlich unbedeutend ist, so erspart man durch seine Weglassung eine Vorschrift und eine Operation.

Eine nicht ganz unbeträchtliche Erleichterung der Rechnung würde man erlangen, wenn man k ohne Rücksicht auf die Zenithdistanz des Mondes, etwa so wie es für die Zenithdistanz 45° ist, annehmen könnte. Dann würde die Aufsuchung jener Zenithdistanz ganz erspart und man brauchte nur den Winkel H. Dieses ist wirklich eine starke Annäherung an die Wahrheit wenn der Mond hoch steht; auch noch für die Zenithdistanzen 55°, 60°, 65°, 70° beträgt der aus der Veränderung von k entstehende Unterschied der Strahlenbrechungen nur 0″1, 0″3, 0″6, 1″5. Man könnte diese Annäherung für die Fälle wo der Mond 25° über dem Horizonte, oder höher steht, anzuwenden vorschlagen, allein da sie für geringere Höhen beträchtliche Fehler erzeugen würde, und die Berechnung der Zenithdistanz, wozu man alles Erforderliche schon besitzt, nur sehr geringe Mühe verursacht, so ist es vielleicht zweckmäfsiger, es bei einer auf alle Fälle anwendbaren Vorschrift bewenden zu lassen. Uebrigens ist, wegen der Kleinheit der Aenderung welche k durch eine Aenderung der Zenithdistanz erfährt, eine ohngefähre Berechnung derselben immer hinreichend.

Ueber die Einwirkung der Strahlenbrechung auf Distanzen des Mondes von der Sonne bemerke ich noch, dafs nach der oben vorgeschlagenen unmittelbaren Beziehung derselben auf den Sonnenrand, der Halbmesser der Sonne aus der Formel III (§ 6) weggelassen und dieselbe

$$D = d' - k \tang(d' + e' - H) - K \tang(H - e')$$

gelesen werden mufs. K' wird mit desto gröfserem Rechte mit dem für die Zenithdistanz Z geltenden K verwechselt werden können, je kleiner der Unterschied dieser Zenithdistanz und

$$Z - e' \cos P'$$

für welche K' genommen werden sollte, durch die Beziehung des Punktes S auf den Rand der Sonne geworden ist.

(Der Beschlufs folgt.)

Ausgegeben 1832. Februar 7.

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

№. 220.

Neue Berechnungsart für die nautische Methode der Mondes-Distanzen.

Von Herrn Professor und Ritter *Bessel.*

(Beschlufs.)

10.

Ich werde nun alle Operationen, welche man machen mufs um das Resultat einer beobachteten Entfernung des Mondes von einem Fixsterne oder von der Sonne oder einem Planeten zu erhalten, zusammenstellen und vollständige Rechnungsbeispiele für beide Fälle hinzufügen. Ich richte beides den Formeln (II^a) § 3 gemäfs ein, weil nicht-logarithmische Sinustafeln allgemeiner verbreitet sind als ähnliche Tafeln für die Tangenten.

A. Distanz des Mondes von einem Sterne.

Nachdem man aus der Ephemeride (§ 9) für die Greenwicher W. Z. $= T+m$ die Zahlen ihrer 7 Columnen genommen und daraus $d_,$, $log\, n$, Q, $log\, sin\, \pi_,$ und den Stundenwinkel des Sterns abgeleitet hat, berechnet man

I. den parallactischen Winkel und die Zenithdistanz des Sterns:

$$a = \cos\varphi \,\sin t;$$
$$f\sin F = \cos\varphi\,\cos t; \quad \mathrm{tang}Z\cos q = \mathrm{cotg}(F+\Delta)$$
$$f\cos F = \sin\varphi; \quad \mathrm{tang}Z\sin q = \frac{a}{f}\,\mathrm{cosec}(F+\Delta)$$

II. die von der Parallaxe geänderte Distanz des Mondrandes vom Sterne d'' und den Winkel am Sterne P':

$$P_, = Q - q$$
$$r'\cos d'' = \cos d_, - \sin\pi_,\cos Z$$
$$r'\sin d''\cos(P'-P_,) = \sin d_, - \sin\pi_,\sin Z\cos P_,$$
$$r'\sin d''\sin(P'-P_,) = \sin\pi_,\sin Z\sin P_,$$

III. die scheinbare Distanz D:

$$\mathrm{tang}\,H = \mathrm{tang}\,Z\cos P'$$
$$\cos z = \frac{\cos Z}{\cos H}\cos(d''-H)$$

k und K aus z und Z und den Angaben der meteorologischen Instrumente

$$D = d'' - k\,\mathrm{tang}(d''-H) - K\,\mathrm{tang}\,H$$

IV. die wahre Meridiandifferenz

$$m+x = m + \frac{D'-D}{n'}$$

wobei, wenn x nicht etwa sehr grofs ist, n' mit n, dessen Logarithmen die Ephemeride angiebt, verwechselt werden kann.

B. Distanz des Mondes von der Sonne oder einem Planeten.

Die Ephemeride (§. 9) ergiebt für die Zeit $T+m$

$$d_,,\quad log\, n,\quad Q,\quad log\,sin\,\pi_,,\quad e;$$

die Rechnung ist:

I. wie vorher, allein sie wird mit der in der Ephemeride enthaltenen verbesserten Declination geführt.

II. statt $d_,$ wird $d_,+e$ angewandt, wodurch $d''+e'$ statt d'' gefunden wird; das hiervon abzuziehende e' ist

$$= e\,\frac{r'\sin(d''+e')}{\sin(d_,+e)}$$

III. die scheinbare Distanz D:

$$\mathrm{tang}\,H = \mathrm{tang}\,Z\cos P'$$
$$\cos z = \frac{\cos Z}{\cos H}\cos(d''+e'-H)$$
$$D = d'' - k\,\mathrm{tang}(d''+e'-H) - K\,\mathrm{tang}(H-e')$$

IV. wie vorher.

Die beiden Beispiele welche ich hier folgen lasse, sind fingirt.

A. 1831 Juni 2. $14^h\,24'\,10''$ W. Z. ist die Entfernung α Arietis vom nächsten Mondrande $= 61°\,19'\,30''$ gemessen. Das Barometer zeigte 30,3 Zoll Engl., das daran befindliche Thermometer 68° F., die Temperatur der Luft war 65° F. Die Breite des Beobachtungsortes ist $54°\,42'\,50''$ N.; sein geschätzter Mittagsunterschied $1^h\,22'$ Ost von Greenwich.

Ephemeride.

	I	II	III.	IV	V	VI	VII
	° ′ ″			° ′ ″		h ′ ″	° ′ ″
12^h	61 46 14,4	9,71401	1,085n	243 5 14	8,21754	2 42 42,0	+22 39 25
$1^h 2' 10''$	−32 11,4	+31	+3	−11 0	+26	+10,6	——
	61 14 3,0	9,71432	1,088n	242 54 14	8,21780	2 42 52,6	+22 39 25
	−10,0	9,71417	9,912		+97	14 24 10,0	
$d_, =$	61 13 53,0	3,57171	1,000n	$l.\sin\pi_, =$	8,21877	17 7 2,6	
		3,28588			$t =$	256° 45′ 39″	

I. q und Z.

$l.\cos\varphi$	9.76167	$comp.\ l.f$	0,08253
$l.\sin t$	9,99830n	$l.a$	9,74997n
$l.\cos t$	9,35987n	$l.\operatorname{cosec}(F+\Delta)$	0,63336
$l.f\sin F$	9,12154n	$l.\operatorname{tang} Z\sin q$	0,46586n
$l.f\cos F$	9,91184	$l.\operatorname{tang} Z\cos q$	0,62128
$l.\operatorname{tang} F$	9,20970n	$l.\operatorname{tang} q$	9,84458n
F	$-9^\circ 12' 21''$	q	$-34^\circ 57' 36''$
Δ	+22 39 25	$l.\cos q$	9,91358
$F+\Delta$	13 27 4	$l.\operatorname{tang} Z$	0,70770
$l.\cos F$	9,99437	Z	$78^\circ 54' 34''$

II. d'' und P'; $P_{,} = 277^\circ 51' 50''$

$l.\sin\pi_{,}$	8,21877	$\sin d_{,}$	0,876572
$l.\cos Z$	9,28412	2)	+0,002222
$l.\sin Z$	9,99181	$r'\sin d''\cos(P'-P_{,})$	0,874350
1)	7,50289	log	9,941685
$l.\sin\pi_{,}\sin Z$	8,21058	3)	8,20648n
$l.\cos P_{,}$	9,13615	$l.\operatorname{tang}(P'-P_{,})$	8,26480n
$l.\sin P_{,}$	9,99590n	$P'-P_{,}$	$-1^\circ 3' 15''$
2)	7,34673	P'	276 48 35
3)	8,20648n	$l.\cos(P'-P_{,})$	9,999926
$\cos d_{,}$	0,481274	$l.r'\sin d''$	9,941759
1)	+0,003183	$l.r'\cos d''$	9,679511
$r'\cos d''$	0,478091	$l.\operatorname{tang} d''$	0,262248
		d''	$61^\circ 20' 3''9$

III. D.

$l.\operatorname{tang} Z$	0,70770
$l.\cos P'$	9,07398
$l.\operatorname{tang} H$	9,78168
H	$31^\circ 10' 8''$
$d''-H$	30 9 56
$l.\cos Z$	9,28412
$l.\sec H$	0,06771
$l.\cos(d''-H)$	9,93680
$l.\cos z$	9,28863
z	$78^\circ 47' 29''$

$l.\beta = +0,0088$; $l.\gamma = -0,0136$

$l\ \alpha$	1,7463	....	1,7460
$l.(\beta \text{ et } \gamma)$	−52		−52
$l.k$	1,7411	$l.K$	1,7408
$l.\operatorname{tang}(d''-H)$	9,7643	$l.\operatorname{tang} H$	9,7817
	1,5054		1,5225
	32''0		33''3

Refraction	$-1' 5''3$
d''.....	61 20 3.9
D......	61 18 58,6

IV. $m+x$

$D'-D = +31''4$ log 1,4969 $m = -1^h 22' 0''$

$l.n$ 9,7143n $x = -1\ 0,6$

1,7826n $m+x = -1\ 23\ 0,6$

B. 1831 Juni 2. $23^h 8' 45''$ W. Z. ist die Entfernung der nächsten Ränder des Mondes und der Sonne $= 96^\circ 47' 10''$ gemessen. Das Barometer zeigte 29,6 Zoll Engl., das daran befestigte Thermometer 88° F, die Temperatur der Luft war $= 90^\circ$F. Die Breite des Beobachtungsortes ist $19^\circ 31'$ N.; sein geschätzter Mittagsunterschied $8^h 50'$ Ost von Greenwich.

Ephemeride.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
	° ' ''			° ' ''		''	° ' ''	' ''
12^h.....	97 11 45,9	9,69782	0,907n	261 19 54	8,21754	+31,3	+22 10 43	8 28
$2^h 18' 45''$	−1 9 17,4	+124	+5	−4 11	+58	− 0,1	+44	0
	96 2 28,5	9,69906	0,912n	261 15 43	8,21812	+31,2	22 11 27	8 28
	−2,7	9,69844	9,524		+16	23 8 45,0		
$d_{,} =$	96 2 25,8	3,92038	0,436n	$l.\sin\pi_{,} =$	8,21828	23 9 16,2		
$e_{,}$	+8 28,0	3,61882			$t =$	$347^\circ 19' 3''$		
$d_{,}+e_{,}$	96 10 53,8							

I. q und Z.

$l.\cos\varphi$	9,97430	$comp.\ l.f$	0,00951
$l.\sin t$	9,34153n	$l.a$	9,31583n
$l.\cos t$	9,98927	$l.\operatorname{cosec}(F+\Delta)$	0.00033
$l.f\sin F$	9,96357	$l.\operatorname{tang} Z\sin q$	9,32567n
$l.f\cos F$	9,52385	$l.\operatorname{tang} Z\cos q$	8,58926n
$l.\operatorname{tang} F$	0,43972	$l.\operatorname{tang} q$	0,73641
F	$70^\circ 2' 0''$	q	$259^\circ 36' 11''$
Δ	22 11 27	$l.\sin q$	9,99281n
$F+\Delta$	92 13 27	$l.\operatorname{tang} Z$	9,33286
$l.\sin F$	9,97308	Z	$12^\circ 8' 43''$

II. d'', e' und P'; $P_{,} = 1^\circ 39' 32''$.

$l.\sin\pi_{,}$	8,21828	$\sin(d_{,}+e_{,})$	0,994185		
$l.\cos Z$	9,99017	2)	0,003476		
$l.\sin Z$	9,32303	$r'\sin(d''+e')\cos(P'-P_{,})$	0,990709		
1	8,20845	log	9,995946		
$l.\sin\pi_{,}\sin Z$	7,54131	3	6,00294		
$l.\cos P_{,}$	9,99982	$l.\operatorname{tang}(P'-P_{,})$	6,00699		
$l.\sin P_{,}$	8,46163	$P'-P_{,}$	$0^\circ 0' 21''$		
2)	7,54113	P'	1 39 53		
3)	6,00294	$l.\cos(P'-P_{,})$	0,000000	$l.e_{,}$	2,7059
$\cos(d_{,}+e_{,})$	−0,107680	$l.r'\sin(d''+e')$	9,995946	....	9,9959
1)	+0,016160	$l.r'\cos(d''+e')$	9,092861n	$l.\operatorname{cosec}$	
$r'\cos(d''+e')$	−0,123840	$l.\operatorname{tang}(d''+e')$	0,903085n	$(d_{,}+e_{,})$	0,0025
		$d''+e'$	$97^\circ 7' 30''4$	$l.e'$	2,7043
		d''	96 59 4,2	e'	$8' 26''2$

III. D.

$l.\operatorname{tang} Z$	9,33286
$l.\cos P'$	9,99982
$l.\operatorname{tang} H$	9,33268
H	$12^\circ 8' 26''$
$d''+e'-H$	84 59 4
$H-e'$	12 0 0
$l.\cos Z$	9,99017
$l.\sec H$	0,00982
$l.\cos(d''+e'-H)$	8,94164
$l.\cos z$	8,94163
z	$84^\circ 59' 5''$

$l.\beta = -0,0021$; $l.\gamma = -0,0337$

$l.\alpha$	1,6993	....	1,7614
$l.(\beta \text{ et } \gamma)$	−386	......	−358
$l.k$	1,6607	$l.K$	1,7256
$l.\operatorname{tang}(d''+e'-H)$	1,0567	$l.\operatorname{tang}(H-e')$	9,3275
	2,7174		1,0531
	$8' 41''7$		$0' 11''3$

Refraction ..	$-8' 53''0$
d''.......	96 59 4,2
D........	96 60 11,2

IV. $m+x$.

$D'-D = -3' 1''2$. Wegen der Gröfse der hieraus hervorgehenden Verbesserung des Mittagsunterschiedes, wende ich die Formel (§ 9) an:

$l. \sin x,$	8,2183	$l. k \sin 1''$	6,3463	$l. 0,9724$	9,9878
$l. \cos z$	8,9416	$l. sec(d''+s'-H)^2$	2,1167	$l. n$	9,6991n
	7,1599		8,4630	$l. n'$	9,6869n
	+0,0014		−0,0290	$l(D'-D)$	2,2582n
		x	+ 6′ 12″6		2,5713
		m	−8ʰ 50 0,0		
		$m+x$ =	−8ʰ43′ 47″4		

11.

Durch die Zusammenstellung der Formeln und die beiden Beispiele im vorigen § wird anschaulich, durch welche Rechnungen meine Methode zum Ziele führt. Diese sind wirklich nicht abschreckend, und kürzer als die Rechnungen welche man würde machen müssen, wenn man durch weitere Verfolgung des früher betretenen Weges dasselbe Ziel, nämlich das wahre Resultat, erlangen wollte. Um aber ein vergleichendes Urtheil über die Leichtigkeit der hier gemachten Anwendungen meiner Auflösung der Aufgabe zu erlangen, werde ich die Berechnung des letzten Beispiels auch nach der den Seefahrern gewöhnlichen Methode von *Dunthorne* führen und dabei die Hülfstafeln benutzen, durch welche die Anwendung derselben beträchtlich abgekürzt wird. Diese Tafeln finden sich in *Norie's* Epitome of pract. navigation, wovon ich die Ausgabe von 1828 vor mir habe, deren Rechnungsvorschriften ich hier buchstäblich befolgen werde.

Ephemeride.

	AR. des Mondes.	Decl. des Mondes.	Hor. P.	Halbm.	AR. der Sonne.	Decl. der Sonne.	Halbm.
	° ′ ″	° ′ ″	′ ″	′ ″	h ′ ″	° ′ ″	′ ″
12ʰ....	336 6 24	−10 50 58	56 44	15 28	4 40 21,6	+22 11 49	15 47
2ʰ18′45″	1 13 16	+20 54	+5	+1	+23,4	+45	0
	337 19 40	−10 30 4	56 49	15 29	4 40 45,0	+22 12 34	15 47
=	22ʰ29′ 19″			W. Z. ...	23 8 45		
St. Z....	3 49 30			St. Z.	3 49 30		
	5 20 11				0ʰ51′ 15″		

	5 20 11	*log Rising* ...	4,91758	0ʰ51′ 15″	*log Rising*	3,39618
Breite	19°31′ 0″ N.	*l. cos* ...	9,97430	Breite 19°31′ 0″ N	*l. cos*	9,97430
Decl.	10 30 4 S.	*l. cos* ...	9,99267	Decl. 22 12 34	*l. cos*	9,96652
	30 1 4	76657	4,88455	2 41 34	02173	3,33700
	cos	86587		*cos*	99890	
		09930			97717	

Wahre Höhe des Mondes	5°41′ 56″
Tab. XXX	−47 42
genähert	4 54 14
Tab. XXX	−46 34
Scheinb. Höhe	4 55 22

Wahre Höhe der Sonne	77°44′ 0″
Tab. IV.	+12
—— VI.	−2
Scheinbare Höhe	77 44 10

Beob. Distanz	96°47′ 10″		
Mondhalbmesser T. VII	15 30		
Sonnenhalbmesser	15 47		
Dist. Centr.	97 18 27	. . . . . . *cos*	127195
Scheinb. Höhe des Mondes	4 55 22		
——— ——— der Sonne	77 44 10		
Differenz	72 48 48	. . . . . . *cos*	295486
		Summe	422681
		log	5,626013
		Tab. XXXI	9,999573
		⊙	−18
Wahre Höhe des Mondes	5 41 56		5,625568
——— ——— der Sonne	77 44 0	Zahl ...	422248
Differenz	72 2 4	. . . . . . *cos*	308445
		Differenz	113803
		Scheinb. Distanz	96 32 5
		12ʰ	97 43 1
		Diff.	1 10 56
		3 Stunden	1 29 54
			2ʰ22′ 2″
		W. Z. Greenw.	14 22 2
		Beobachtet	23 8 45
		Mittagsunterschied	8 46 43 Ost.

Prop. *log.*	4044
—— . . .	3015
. . . .	1029

Aus der Vergleichung der vorigen Rechnung mit dieser geht hervor, dafs die letztere die kürzere ist. Sie hat zwar einen sehr grofsen Fehler des Mittagsunterschiedes, nämlich 2′ 56″ in Zeit, welche 44′ der Länge entsprechen, gegeben; allein ich bin zweifelhaft ob selbst so grofse Fehler eine genügende Ursache sind, die ältere Methode gegen eine andere zu vertauschen, welche ihr richtiges Resultat auch nur durch die geringste Vermehrung der Rechnung erkaufen mufs. Der Grund dieses Zweifels liegt darin, dafs ich nirgends die Vorschrift finde, die Monds-Methode in den Fällen nicht anzuwenden, in welchen die Ursachen der Unsicherheit der Rechnungsart, so wie die aus der Unterlassung der Beobachtung der meteorologischen Instrumente entstehende Gefahr eines grofsen Fehlers, so augenfällig hervortreten, dafs sie Niemanden entgangen sein können. Wirklich hätte man das bisherige Verfahren auf Höhen der Gestirne von wenigstens 20° beschränken und nur unter gewissen Bedingungen Ausnahmen von dieser Regel gestatten müssen, wenn Fehler von mehr als einem Viertelgrade in der Länge als erheblich angesehen worden wären; indem man aber die zur Berechnung der Mondsdistanzen dienenden, die Berichtigung der Strahlenbrechung durch die Angaben des Barometers und Thermometers ausschliefsenden Tafeln, bis zu der Höhe von 3° herab berechnet und ihre Anwendung durch keine Ausnahme beschränkt hat, mufs man auf weit gröfsere Fehler gefafst gewesen sein. Da man dennoch nicht vor ihrer Begehung gewarnt hat, scheint eine Annäherung welche man sonst sehr roh nennen würde, für das Bedürfnis der Seefahrer genügend erachtet zu sein.

Die Kürze welche die ältere Berechnungsart, vergleichungsweise mit der meinigen besitzt, ist eine Folge der Hülfstafeln welche für jene vorhanden sind; diese enthalten, mit den Argumenten der scheinbaren Höhe und der Horizontal-Parallaxe des Mondes, sowohl den Unterschied der Höhen-Parallaxe und Strahlenbrechung, als auch den Logarithmen des Verhältnisses der Producte der Cosinusse der scheinbaren und wahren Höhen beider Gestirne; sie kürzen die Rechnung beträchtlich ab, erzeugen aber zugleich in gewissen Fällen grofse Fehler. — Auch meine Berechnungsart läfst sich noch abkürzen, allein da ich glaube dafs dieses nur durch Mittel geschehen kann, welche geübte Rechner der unmittelbaren Anwendung der einfachen Formeln des § 3 nicht vorziehen werden; die neue Berechnungsart aber keinen Anspruch hat, in die Praxis der Seefahrt eingeführt zu werden, wenn sie ihn nicht durch ihre Genauigkeit erlangt — so sollte ich mich vielleicht auf diejenige Umformung derselben, welche für die Seefahrer am geeignetsten zu sein scheint, indem sie die Anwendung von Tafeln mit mehr als 5 Decimalstellen nicht fordert, nicht eher einlassen, als bis practische Kenner der Schiffahrtskunst mich belehren, dafs die Vermeidung der Fehler des bisherigen Verfahrens irgend einigen Werth habe. Bis dahin könnte ich damit zufrieden sein, ein Verfahren gegeben zu haben, durch welches man, wenn man will, das wahre Resultat einer Beobachtung finden kann; allein da ich einmahl auf diese Materie eingegangen bin, will ich sie bis zum Ende führen, und hier noch angeben, welche Rechnungen von dem Seefahrer verlangt werden müssen, wenn er, auf dem im Vorhergehenden gezeigten Wege, zum Ziele gelangen will. Auf den Fall dafs die Sicherheit der Rechnung, in Beziehung auf die Anwendung zur See, gar keinen Werth hat, mufs man das Folgende als eine unnöthige Abänderung meines Verfahrens ansehen.

12.

Man erlangt diese Abänderung durch die schon im 3ten § angedeutete Berechnung von P' und d' durch successive Näherungen, welche vor der directen Berechnung den Vortheil voraus haben, eine geringere Annäherung der anzuwendenden Werthe der trigonometrischen Linien und ihrer Logarithmen zu erfordern; sie läfst sich so einrichten, dafs ein Hülfswinkel welcher dazu nöthig ist, derselbe wird welchen auch die Berechnung des Einflusses der Strahlenbrechung voraussetzt.

Aus den Formeln (II^a) des 3ten § leitet man leicht die folgenden ab:

$$\begin{aligned} r' \cos d' &= \cos d_{,} & &- \sin \pi_{,} \cos Z \\ r' \sin d' &= \sin d_{,} \cos (P'-P_{,}) & &- \sin \pi_{,} \sin Z \cos P' \\ 0 &= \sin d_{,} \sin (P'-P_{,}) & &- \sin \pi_{,} \sin Z \sin P' \end{aligned}$$

Die letztere derselben ist hinreichend zur Bestimmung von P'; die beiden ersteren verwandeln sich, wenn man

$$\begin{aligned} \cos d_{,} &= c \cos (d_{,}) & \cos Z &= h \cos H \\ \sin d_{,} \cos (P'-P_{,}) &= c \sin (d_{,}) & \sin Z \cos P' &= h \sin H \end{aligned}$$

setzt in

$$\begin{aligned} r' \cos d' &= c \cos (d_{,}) - \sin \pi_{,}\, h \cos H \\ r' \sin d' &= c \sin (d_{,}) - \sin \pi_{,}\, h \sin H \end{aligned}$$

und ergeben, durch Elimination von r',

$$\sin [d' - (d_{,})] = \frac{h}{c} \sin \pi_{,} \sin [d' - H]$$

welche Gleichung der für P' gefundenen, nämlich

$$\sin (P'-P_{,}) = \frac{\sin \pi_{,} \sin Z}{\sin d_{,}} \sin P'$$

ganz analog ist.

Diese letztere werde ich

$$\sin (P'-P_{,}) = m \sin P'$$

schreiben, und $x, x', x'' \ldots$ so annehmen, dafs

$$\sin x = m \sin P_,$$
$$\sin x' = m \sin (P_, + x)$$
$$\sin x'' = m \sin (P_, + x')$$
u. s. w.

ist, also die Reihe der x, x', x''.... zu dem Werthe von $P' - P_,$ convergirt. Indem die Mondsmethode nie auf sehr kleine Distanzen angewandt wird, ist m immer ein kleiner Bruch, der selten $\frac{1}{30}$, nie $\frac{1}{20}$ beträgt, und dessen Kleinheit schon die zweite Annäherung (x') der Wahrheit so nahe bringt, dafs sie, selbst im äufsersten Falle, nur wenige Secunden, welche auf die gesuchte scheinbare Distanz keinen merklichen Einflufs erhalten, davon abweichen kann.

Sobald $P' - P_,$ hierdurch gefunden ist, können c und $(d_,)$ bestimmt werden. Das erstere ist

$$= \sqrt{[\cos d_,^2 + \sin d_,^2 \cos (P' - P_,)^2]}$$
$$= \sqrt{[1 - \sin d_,^2 \sin (P' - P_,)^2]}$$

und wenn man für $\sin d_, \sin (P' - P_,)$ seinen Ausdruck schreibt

$$= \sqrt{[1 - \sin \pi_,^2 \sin Z^2 \sin P'^2]}:$$

es ist also nicht kleiner als $\cos \pi_,$ und nicht gröfser als 1, weshalb es, da es nur als Divisor von $\sin \pi_,$ vorkömmt, ohne erheblichen Nachtheil mit 1 verwechselt, oder weggelassen werden kann. Das letztere findet sich durch die bekannte Entwickelung von

$$\operatorname{tang} (d_,) = \operatorname{tang} d_, \cos (P' - P_,),$$

nämlich

$$(d_,) = d_, - \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (P' - P_,)^2 \sin 2 d_,$$
$$+ \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (P' - P_,)^4 \sin 4 d_, - \text{etc.}$$

von welcher aber schon das in $\sin 4d_,$ multiplicirte Glied, als unmerklich, weggelassen werden kann. Ebenfalls macht es keinen merklichen Unterschied wenn man $\operatorname{tang} \frac{1}{2} (P' - P_,)$ mit $\frac{1}{2} \sin (P' - P_,)$ verwechselt, also

$$(d_,) = d_, - \sin x'^2 . \tfrac{1}{2} \sin d_, \cos d_,$$

annimmt. Man bringt daher der durch die Ephemeride gefundenen Distanz $d_,$ diese leicht zu berechnende Verbesserung an, und berechnet nun $d' - (d_,)$ aus den Formeln:

$$\sin y = h \sin \pi_, \sin [(d_,) - H]$$
$$\sin y' = h \sin \pi_, \sin [(d_,) - H + y]$$
$$\sin y'' = h \sin \pi_, \sin [(d_,) - H + y']$$
u. s. w.

deren zweite aber schon in keinem Falle eine halbe Secunde von $d' - (d_,)$ abweichen kann. Um diese Art P' und d' zu berechnen, mit der gröfsten Leichtigkeit ausführen zu können, mufs man die Logarithmen der Sinusse für jede Secunde der drei ersten Grade bei der Hand haben. Diese Tafel darf nur 5 Decimalstellen besitzen; wenn man alles was unter einer Secunde ist nicht beachten will reichen vier derselben aus. Zur Berechnung der ersten Annäherungen x und y, ist noch weniger Genauigkeit erforderlich.

Wenn die Entfernung des Mondes von der Sonne oder einem Planeten berechnet werden soll, so mufs man, aufser dem für einen Fixstern Erforderlichen, noch

$$e' = e_, \frac{r' \sin (d' + e')}{\sin (d_, + e_,)}$$

suchen. Aus einer der im 3ten § entwickelten Formeln findet man

$$\frac{r' \sin (d' + e')}{\sin (d_, + e_,)} = 1 - \frac{\sin \pi_, \sin Z \cos \frac{1}{2} (P' + P_,)}{\sin (d_, + e_,) \cos \frac{1}{2} (P' - P_,)}$$

wofür man aber, ohne einen erheblichen Fehler zu begehen,

$$1 - \frac{\sin \pi_, \sin Z \cos P'}{\sin (d_, + e_,)} = 1 - \frac{\sin \pi_, h \sin H}{\sin (d_, + e_,)}$$

schreiben kann. Man hat also (e für $e_,$ geschrieben)

$$e' = e - e \frac{\sin \pi_, h \sin H}{\sin (d_, + e)}$$

und diese Formel hat vor der einfacheren im 6ten § den Vorzug, dafs sie in allen Fällen anwendbar ist, während jene unbestimmt wird wenn beide Gestirne in einem Verticalkreise stehen.

Um den Vortheil welchen diese Umformung gewährt anschaulich zu machen, setze ich die danach geführte Rechnung des ersten der beiden Beispiele § 10 hieher; die Theile I und IV desselben wiederhole ich nicht, da sie ungeändert bleiben.

II. d'' und P'

$l. \sin \pi_,$	8,21877	$P_,$	277°51'50"	$l. \sin Z$	9,99181
$l. \sin Z$	9,99181	x	−1 3 6	$l. \cos P'$	9,07398
$l. \operatorname{cosec} d_,$	0,05722	$P_, + x$	276 48 44	$l. h \sin H$	9,06579
$l. m$	8,26780	x'	−1 3 15	$l. h \cos H$	9,28412
$l. \sin P_,$	9,9959 n	P'	277 48 35	$l \operatorname{tang} H$	9,78167
$l. \sin x$	8,2637 n	$2\, l. \sin x'$	6,5294	H	31 10 8
$l. \sin (P_, + x)$	9,99692n	$l. \frac{1}{2}$	9,6990	$l. \cos H$	9,93229
$l. \sin x'$	8,26472n	$l. \sin d_,$	9,9428	$l. h$	9,35183
$d_,$	61°13'53"0	$l. \cos d_,$	9,6824	$l \sin \pi_,$	8,21877
$(d_,) - d_,$	−14,7	....	5,8536	$l. h \sin \pi_,$	7,57060
$(d_,)$	61 13 38,3	$(d_,) - H$	30 3 30	....$l. \sin$	9,6997
y'	+6 25,6	y	+ 6 24	$l. \sin y$	7,2703
d''	61 20 3,9		30 9 54	....$l. \sin$	9,70113
				$l. \sin y'$	7,27173

III. *D.*

$d'-H$	30°9′56″
$l.\,h$	9,35183
$l.\cos(d'-H)$	9,93680
$l.\cos z$	9,28863
z	78°47′29″

$l.\beta = +0,0088;\quad l.\gamma = -0,0136$

$l.\,\alpha$	1,7463	. . . . .	1,7460
$l.(\beta \text{ et } \gamma)$	−52		−52
$l\,k$	1,7411	$l.\,K$	1,7408
$l.tg(d'-H)$	9,7643	$l.\,tang\,H$	9,7817
	1,5054		1,5225
	32″0		33″3

Refraction	−1′		5″3
d'.	61	20	3,9
D.	61	18	58,6

Man sieht hieraus, dafs die Berechnungsart in dieser Form sehr wenige Arbeit erfordert, und auch für weniger geübte Rechner nicht lästig sein kann, indem keine der Operationen der letzten Decimalstelle der Logarithmen so viel Gewicht giebt, dafs eine Ungenauigkeit derselben um eine Einheit, einen wesentlichen Fehler erzeugen könnte. — Ich kann in der That nicht mit Sicherheit entscheiden, ob die Anwendung der *Dunthorne*schen, von Hülfstafeln unterstützten Methode, oder die der meinigen, für welche keine Hülfstafeln vorhanden sind, leichter zum Resultate führt. Die erstere wendet w e n i g e r e Operationen an als die letztere, diese dagegen w e n i g e r m ü h s a m e: es sind daher ungleichartige Dinge zu vergleichen, auf deren Beurtheilung die gröfsere oder geringere Fertigkeit des Rechners grofsen Einflufs zu erhalten scheint. Auf keinen Fall kann der Unterschied der Arbeit welche beide Verfahrungsarten erfordern, so beträchtlich sein, dafs er veranlassen könnte, einen w e s e n t l i c h e n Vorzug des Resultats einer derselben ungenutzt zu lassen. Ist jedoch die Genauigkeit und Sicherheit welche die neuere, vorzugsweise vor der älteren, gewährt, o h n e p r a c t i s c h e n W e r t h, so fält jeder Grund einer Aenderung des bestehenden Verfahrens weg, und es ist dann gewifs nicht vortheilhaft an der Einrichtung der Ephemeriden und der Hülfsbücher für die Seefahrer, etwas zu ändern.

Sollte dagegen der Genauigkeit der in dem Vorhergehenden auseinandergesetzten Methode ein Werth eingeräumt werden, so würden noch zwei Forderungen befriedigt werden müssen, ehe sie in die Praxis eingeführt werden könnte:

1. müfsten die in den Formeln enthaltenen Rechnungsvorschriften in Worte übersetzt, dabei aber so eingegerichtet werden, dafs, ohne Aufmerksamkeit auf die algebraischen Zeichen, jede Zweideutigkeit vermieden und die Unterscheidung verschiedener Fälle so viel als möglich erspart wird;
2. müfste derjenige Theil der Rechnung welcher sich mit einigem Vortheile auf Tafeln reduciren läfst, wirklich auf diese Art dem an dergleichen Tafeln gewöhnten Seefahrer erspart werden.

So wichtig es mir zu sein scheint, diese beiden Forderungen so vollständig als möglich zu erfüllen, so kann die Neigung dazu offenbar nicht eher vorhanden sein, als bis der Zweifel über d e n W e r t h o d e r U n w e r t h einer in a l l e n F ä l l e n s i c h e r e n R e c h n u n g beseitigt sein wird. Ich werde daher dieses abwarten und nur im Falle der Entscheidung für den W e r t h derselben wieder zu dieser Materie zurückkehren.

A n m e r k u n g. Man sieht leicht, dafs man das Resultat einer beobachteten Distanz des Mondes, mit nicht gröfserem Fehler, als die in dieser Abhandlung erläuterte Methode durch ihre Beziehung auf den Rand des Mondes erhält, auch durch Befolgung der gewöhnlichen Berechnungsart erlangen kann, wenn man zur Berechnung der Zenithdistanz des Mondes die Rectascension und Declination nicht seines Mittelpunktes, sondern des in der Richtung nach dem verglichenen Gestirne liegenden Punktes seines Randes anwendet; auch falls das verglichene Gestirn die Sonne ist, ihren Ort gleichfalls auf ihren Rand bezieht. Die Rechnung wird aber, falls man nicht auf die Verbesserung der Strahlenbrechung durch den Barometer- und Thermometerstand Verzicht leisten will, weniger kurz als die oben vorgeschlagene, zumahl wenn man diese durch schickliche specielle Hülfsmittel so sehr als möglich erleichtert; auch wird die Ephemeride weniger kurz und in ihrer Anwendung weniger bequem.

Verbesserung des Logarithmen des Sinus der Horizontal-Parallaxe.

Polhöhe.	Verbesserung.	Polhöhe.	Verbesserung.
0°	0,00000	16°	0,00011
1	0,00000	17	0,00012
2	0,00000	18	0,00014
3	0,00000	19	0,00015
4	0,00001	20	0,00017
5	0,00001	21	0,00019
6	0,00002	22	0,00020
7	0,00002	23	0,00022
8	0,00003	24	0,00024
9	0,00004	25	0,00026
10	0,00004	26	0,00028
11	0,00005	27	0,00030
12	0,00006	28	0,00032
13	0,00007	29	0,00034
14	0,00008	30	0,00036
15	0,00010	31	0,00038
16	0,00011	32	0,00041

Polhöhe.	Verbesserung.	Polhöhe.	Verbesserung.	Polhöhe.	Verbesserung.	Polhöhe.	Verbesserung.	Polhöhe.	Verbesserung.
32°	0,00041	42°	0,00065	52°	0,00090	62°	0,00113	71°	0,00130
33	0,00043	43	0,00067	53	0,00092	63	0,00115	72	0,00131
34	0,00045	44	0,00070	54	0,00095	64	0,00117	73	0,00133
35	0,00048	45	0.00072	55	0,00097	65	0,00119	74	0,00134
36	0,00050	46	0,00075	56	0,00100	66	0,00121	75	0,00135
37	0,00052	47	0,00077	57	0,00102	67	0,00123	76	0,00136
38	0,00055	48	0 00080	58	0,00104	68	0,00125	77	0,00138
39	0,00057	49	0,00082	59	0,00106	69	0,00126	78	0,00139
40	0,00060	50	0 00085	60	0,00109	70	0,00128	79	0 00140
41	0,00062	51	0,00087	61	0,00111	71	0,00130	80	0,00141
42	0,00065	52	0,00090	62	0,00113				

Bessel.

Ephemeride des *Enckeschen* Cometen.

Die folgende scharf berechnete Ephemeride dieses Cometen verdanke ich der Güte des Herrn Professors und Ritters *Encke*.

S.

Für die Wiederkehr des *Encke*schen Cometen im Jahre 1832 gaben die vollständig durchgeführten Störungsrechnungen die folgenden Elemente:

Epoche 1832 Mai 4,0 mittl. Pariser Zeit.

	°	'	"	
Mittl. Anomalie	0	0	20,86	
Mittl. tägl. sider. Beweg.			1071,32651	
Länge des Perihels . . .	157	21	32,2	mittl. Aeq. Mai 4.
Aufsteigender Knoten . .	334	32	4,1	mittl. Aeq. Mai 4.
Neigung	13	22	12,3	
Eccentricitäts-Winkel .	57	43	17,0	

Die nachfolgende Ephemeride ist so berechnet, dafs die Elemente als constant angesehen wurden, und die sämmtlichen Oerter auf das feste mittlere Aequinoctium 1832 Mai 4,0 sich beziehen.

Die Correction wegen der Veränderlichkeit der Elemente, algebraisch zu der Ephemeride zu addiren fand sich in

	AR.	Decl.
	"	"
1832 April 1,5	— 0,14	+ 0,02
16,5	— 0,17	+ 0,09
Mai 1,5	— 0,01	+ 0,02
16,5	+ 1,08	+ 0,84

Für die Reducirung der Ephemeride auf das jedesmalige wahre Aequinoctium, die Vergleichung der Beobachtungen, und die Schätzung der Lichtstärke dient folgende Tafel; in welcher alle Gröfsen algebraisch zu den Angaben der Ephemeride zu addiren sind.

1832.	Aberration in Zeit.	Red. f. W. Aeq. α	Red. f. W. Aeq. δ	Log. Entfernung von der Sonne.	Log. Entfernung von der Erde.
	' "	"	"		
Febr. 18,3	+18 11,2	—19,4	—8,7	0,17405	0,34488
23,3	17 54,4	18,9	8,7	0,15383	0,33815
28,3	17 34,8	18,4	8,7	0,13199	0,33015
März 4,3	17 12,3	18,0	8,7	0,10826	0,32077
9,3	16 46,8	17,6	8,8	0,08234	0,30992
14,3	+16 18,4	—17,2	—8,8	0,05386	0,29747
19,3	15 46,8	16,9	8,8	0,02232	0,28326
24,3	15 12,2	16,6	8,8	9,98713	0,26710
29,3	14 34,4	16,3	8,8	9,94751	0,24869
April 3 3	13 53,0	16,0	8,7	9,90246	0,22763
8,3	+13 7,7	—15,8	—8,6	9,85075	0,20333
13,3	12 17,8	15,6	8,5	9,79101	0 17490
18,3	11 22,3	15,4	8,4	9,72231	0,14092
23,3	10 19,5	15,2	8,2	9,64643	0,09904
28,3	9 8,0	14.9	7,9	9,57458	0,04576
Mai 3,3	+ 7 48,8	—14,5	—7,6	9,53639	9,97806
8,3	6 30,4	13,9	7,4	9,55921	9,89847
13,3	5 22,5	13,1	7,2	9,62559	9,81547
18,3	4 28,1	12,1	7,2	9,70216	9,73534

7h 12' Mittl. Par. Zeit.	AR.	Stdl. Bew. in AR.	Declin.	St. Bew. in Decl.
	° ' "	' "	° ' "	"
1832 Febr. 18,3	359 15 47,2	+1 4,91	+7 9 30,7	+27,08
19,3	359 41 54,8	1 5,72	7 20 24,9	27,44
20,3	0 8 22,1	1 6,55	7 31 27,6	27,79
21,3	0 35 9,3	1 7,39	7 42 38,8	28,14
22,3	1 2 16,9	1 8,24	7 53 58 4	28,50
23,3	1 29 45,1	+1 9,11	+8 5 26,5	+28,85
24,3	1 57 34,3	1 9,99	8 17 3,1	29,20
25,3	2 25 44,9	1 10,89	8 28 48,3	29,56
26,3	2 54 17,4	1 11,81	8 40 42,0	29,92
27,3	3 23 12,1	1 12,75	8 52 44,3	30,27
28,3	3 52 29,5	+1 13,71	+9 4 55,1	+30,63