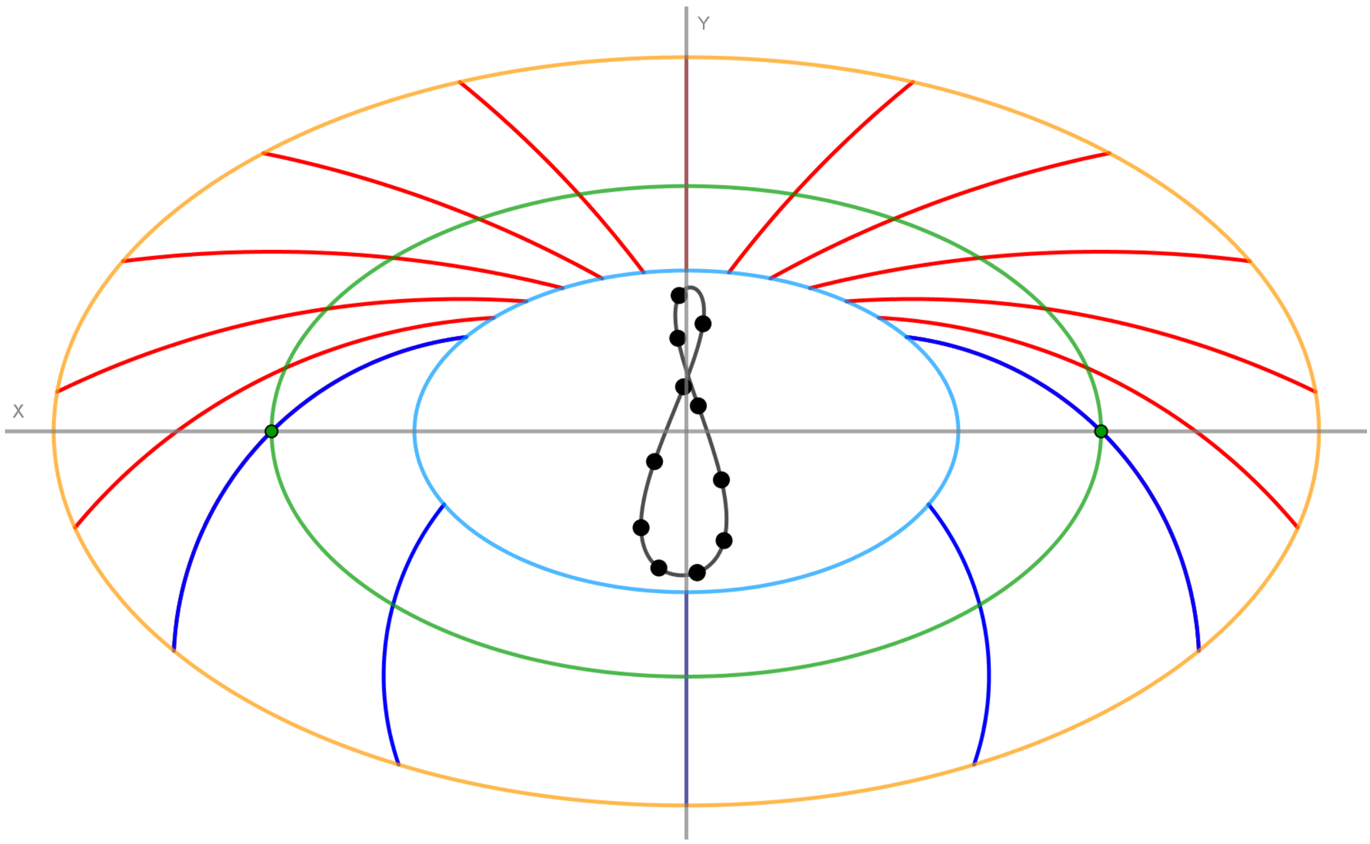
Construcción matemática del analema, con ecuaciones simplificadas, y su reloj con horas temporarias



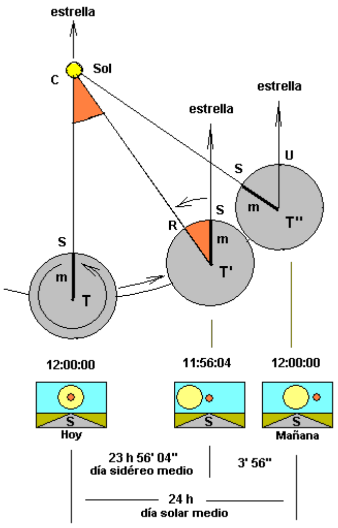
Alejandro José Muñoz Morán

Introducción y datos previos

Al utilizar el período orbital como valores de las curvas, no se recurrirá al ángulo del nodo vernal sino al día en que se posiciona en tal punto.

Tierra			
Concepto	Símbolo	Valor	Unidades
Período Orbital	Año	365,25	Días
Excentricidad Orbital	ε	0,01671123	
Día del Nodo Vernal	♈	80	
Minutos en un Día (Solar Medio)	mpd	1440	Minutos
Inclinación Axial	α	23,5	Grados
Latitud	λ	36,53	Grados

También serán necesarios, más adelante, el Movimiento Medio Diario en una órbita idealizada y la Diferencia entre los tipos de Día Solar como factor de conversión para las componentes angulares de la Ecuación de Tiempo.



$$Movimiento\ Medio\ Diario: \mu = \frac{360°}{Año}\left[\frac{Grados}{Días}\right]$$

$$Rotación\ de\ Día\ Solar\ Medio: \Delta = 360° + \mu\ [Grados]$$

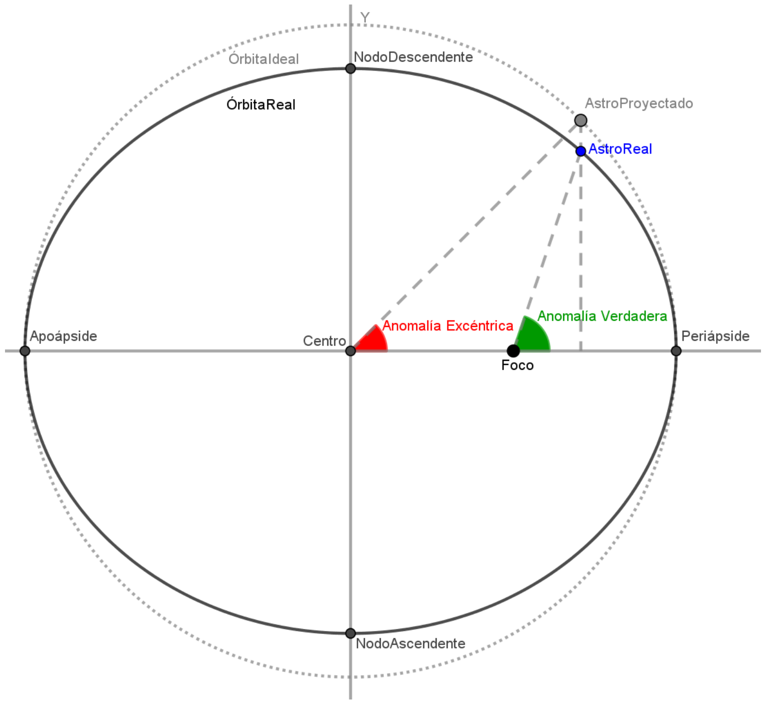
$$Diferencia\ entre\ Días\ Solares\ Medio\ y\ Sidéreo: mpg = \frac{mpd}{\Delta}\left[\frac{Minutos}{Grados}\right]$$

Para evitar realizar cálculos tediosos, y no completamente precisos, se obtendrá el día a partir de la Anomalía Excéntrica mediante un sistema de ecuaciones y cambio de variable.

$$Día: t = \frac{(E - \varepsilon \cdot \sin(E)) + (\mu \cdot t_0)}{\mu} \left\{ \begin{array}{c} Anomalía\ Excéntrica: 0° \leq E \leq 360° \\ Día\ Inicial: t_0 = 0 \\ Ecuación\ de\ Kepler: M = E - \varepsilon \cdot \sin(E) \\ Anomalía\ Media: M = \mu \cdot (t - t_0) \end{array} \right.$$

Componente de órbita elíptica

Como las órbitas, para estos casos, son elípticas y el punto de referencia está desplazado a uno de los focos; se hallará la Ecuación de Tiempo Elíptica con la diferencia entre la Anomalía Media y la Anomalía Verdadera, esta última en función de la Anomalía Excéntrica, partiendo de la Periápside.



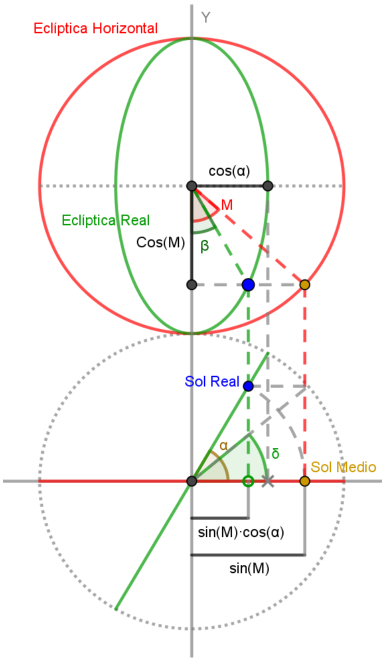
$$Anomalía\ Media: M_E = \mu \cdot (t - 0)\ [Grados]$$

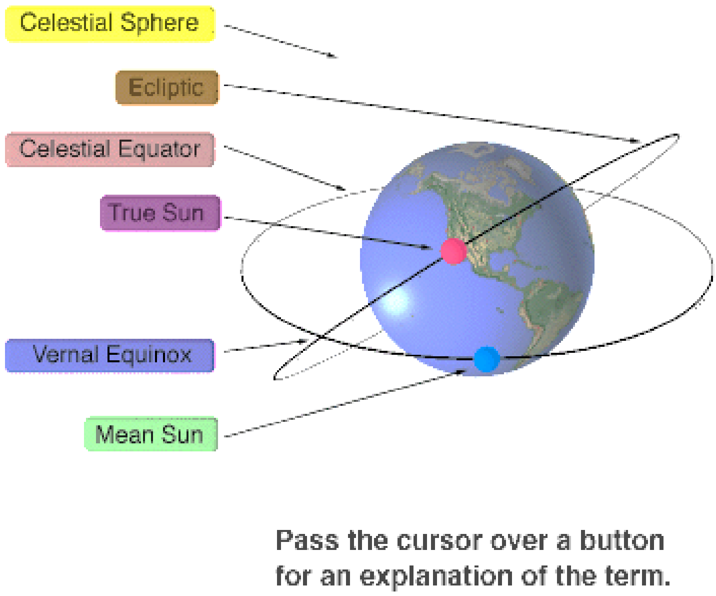
$$Anomalía\ Verdadera: \nu = \begin{cases} 2 \cdot \tan^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \cdot \tan\left(\dfrac{E}{2}\right)\right) + 360° & : E \geq 180° \\ 2 \cdot \tan^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \cdot \tan\left(\dfrac{E}{2}\right)\right) + 0° & : \neg E \geq 180° \end{cases} \quad [Grados]$$

$$Ecuación\ de\ Tiempo\ Elíptica: EDT_E = (M_E - \nu)\ [Grados]$$

Componente de inclinación axial

Mediante las relaciones trigonométricas entre la Eclíptica Real y la Eclíptica Horizontal, que se muestran en la ilustración, se obtienen las siguientes ecuaciones; aunque esta vez se parte del Nodo Ascendente/Vernal.





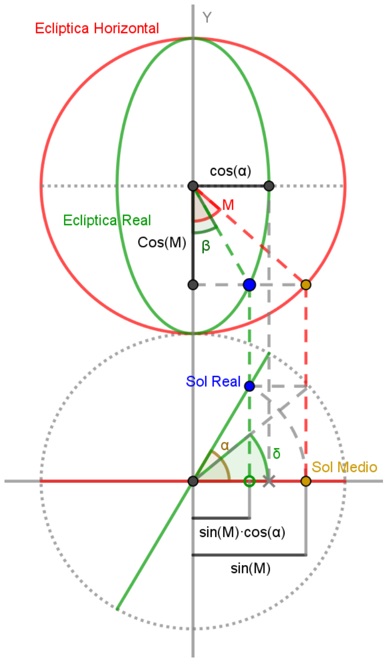
$$\text{Ángulo Solar Horizontal}: M_O = \mu \cdot (t - \Upsilon)\ [Grados]$$

$$\text{Ángulo Solar Oblicuo}: \beta = \begin{cases} \tan^{-1}(\tan(M_O)\cdot\cos(\alpha)) + 180° & : 90° \le M_O < 270° \\ \tan^{-1}(\tan(M_O)\cdot\cos(\alpha)) + 360° & : M_O \ge 270° \\ \tan^{-1}(\tan(M_O)\cdot\cos(\alpha)) + 0° & : \neg(90° \le M_O < 270° \cup M_O \ge 270°) \end{cases} \quad [Grados]$$

$$\text{Ecuación de Tiempo Oblicua}: EDT_O = (M_O - \beta)\ [Grados]$$

Suma de componentes y declinación

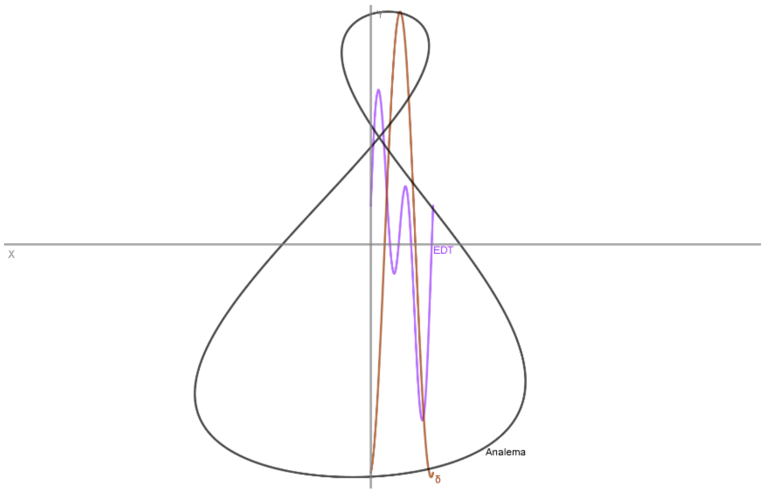
Se termina de parametrizar el Analema sumando ambas componentes angulares de la Ecuación de Tiempo y multiplicando por el factor de conversión a minutos; además de hallar la Declinación mediante el seno del Ángulo Solar Horizontal multiplicado por la Inclinación Axial.



$$Ecuación\ de\ Tiempo: EDT = -(EDT_E + EDT_O) \cdot mpg\ [Minutos]$$

$$Declinación: \delta = \alpha \cdot \sin(M_O)\ [Grados]$$

$$\boxed{Analema \equiv \begin{cases} X = EDT \\ Y = \delta \end{cases} \forall \langle 0° \leq E \leq 360° \rangle}$$

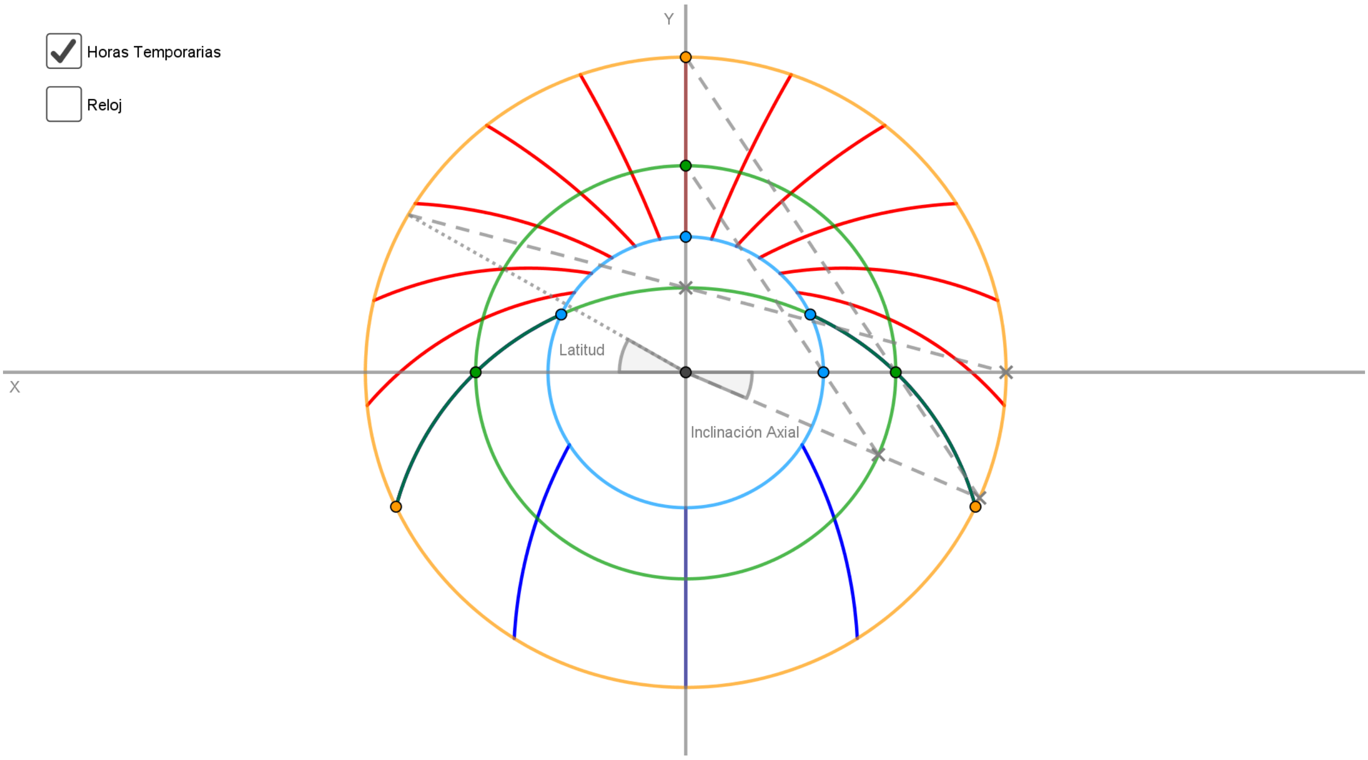


Horas temporarias

Se traza una circunferencia con el radio deseado, a continuación, se trazan otras dos reduciendo el radio por métodos geométricos o mediante el coeficiente.

Una vez obtenidas las Circunferencias Horarias de verano, equinoccios e invierno; se traza el arco de Horizonte como se muestra en la ilustración, de manera que con este arco de circunferencia se obtienen las horas crepusculares en las tres Circunferencias Horarias.

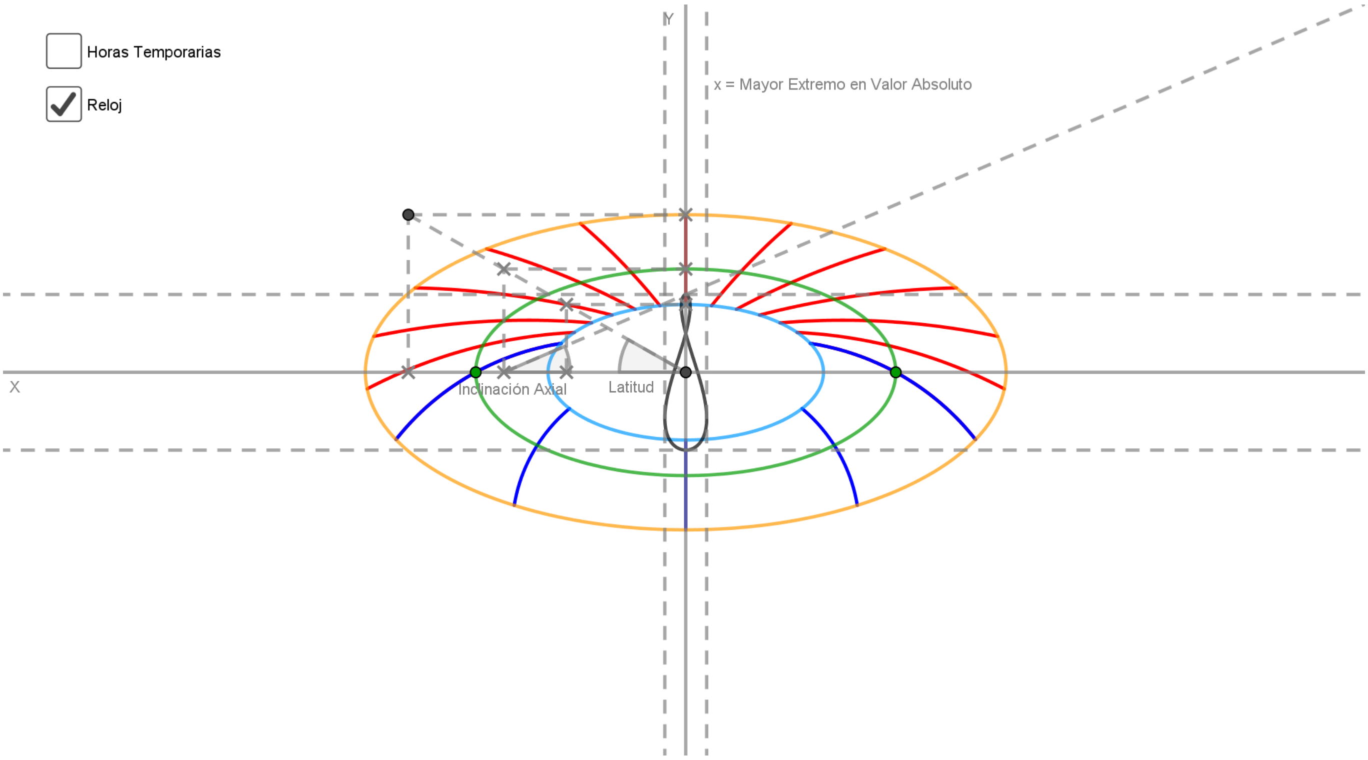
Para las horas diurnas, se subdividen los arcos diurnos de las Circunferencias Horarias en 12 partes iguales y para las nocturnas (o “guardias”) se subdividen los arcos nocturnos de las Circunferencias Horarias en 4 partes iguales; las Líneas Horarias se trazan como arcos de circunferencia (de tres puntos) que subdividen las Circunferencias Horarias.



$$\mathit{Coeficiente\ de\ Reducción\ de\ Circunferencia\ Horaria}\colon\ \kappa = \tan\left(45^{\circ} + \frac{\alpha}{2}\right)$$

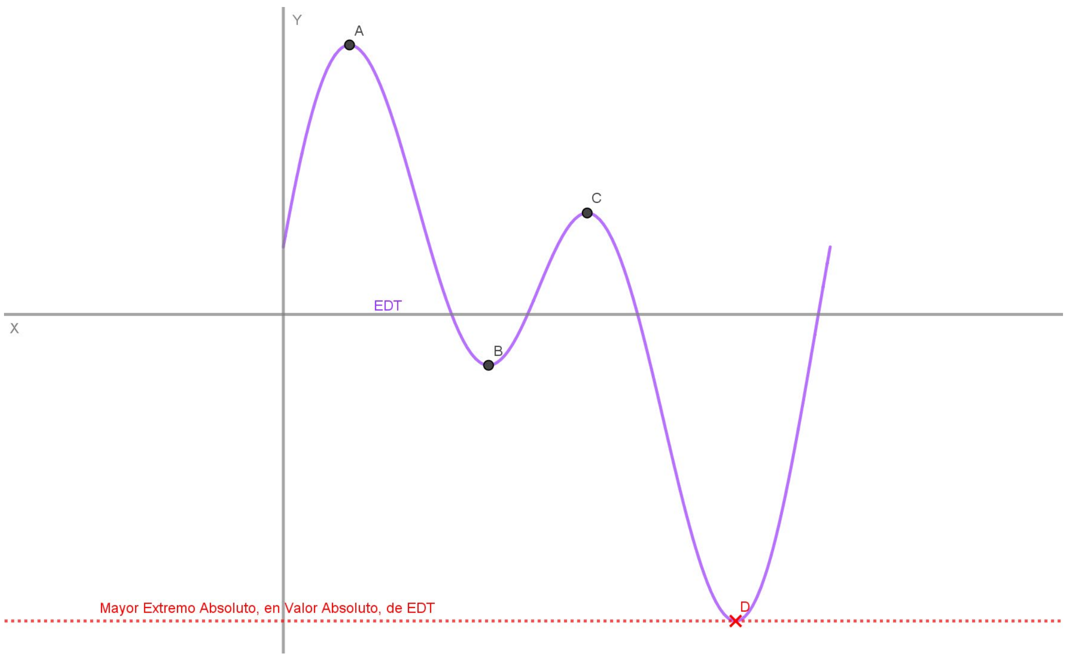
Reloj

Para finalizar, hay que reajustar el disco de reloj a la Latitud del lugar según las siguientes ecuaciones, lo que le dará forma elíptica; e introducir el Analema reescalado según se facilita igualmente a continuación.



$$Reajuste\ de\ Circunferencias\ y\ Líneas\ Horarias \equiv \begin{cases} X_{Elíptico} = x_{Circular} \\ Y_{Elíptico} = y_{Circular} \cdot \sin(\lambda) \end{cases}$$

$$Reescalado\ del\ Analema \equiv \begin{cases} X_{Escalado} = \left(\dfrac{\sin\left(15^{a} \cdot \left(\dfrac{|Mayor\ Extremo\ Absoluto\ de\ EDT|}{60}\right)\right)}{|Mayor\ Extremo\ Absoluto\ de\ EDT|} \right) \cdot EDT \\ Y_{Escalado} = \left(\dfrac{\tan(\alpha)}{\alpha} \cdot \kappa \cdot \cos(\lambda) \right) \cdot \delta \end{cases}$$



Bibliografía:

- https://es.wikipedia.org/
- http://www.analemma.com/Pages/framesPage.html
- http://archive.ncsa.illinois.edu/Classes/MATH198/matownse/mainproject.html
- http://fer3.com/arc/imgx/f2-EoT-Simplified.pdf
- http://hor.cas.cz/calc-en/
- https://juperez.webs.ull.es/elipse.pdf
- https://www.geogebra.org/?lang=es-ES