CALCULS DE LATITUDE

(DOUBLE-ALTITUDE PROBLEM)

La présente fiche est consacrée à l'étude des méthodes de calcul de la latitude du navire consécutive à la mesure de deux hauteurs d'astre(s) et de l'intervalle de temps séparant les deux observations. On s'est essentiellement attaché à mettre en évidence les techniques de calcul. La trame historique est essentiellement extraite de l'ouvrage de Charles H. Cotter « A History of Nautical Astronomy », pages 143 à 162.

La latitude d'un lieu (ou du navire) peut être déterminée de façon simple en mesurant la hauteur d'un astre à l'instant de son passage au méridien ; elle peut aussi être calculée aisément suite à une observation prise au voisinage du passage au méridien (circumméridienne) ainsi que, dans l'hémisphère Nord, par une mesure de hauteur de la Polaire. Dans les deux premiers cas, et de manière instinctive, c'est l'observation du Soleil qui est la plus courante mais, si on considère les observations de la Lune, des planètes et des étoiles, les possibilités de détermination simple de la latitude sont, apparemment, multiples. Cependant, il apparait clairement que les astronomes et marins ont cherché, jusqu'à une époque relativement récente (2e partie du XIXe siècle), à privilégier les observations du Soleil pour fixer la latitude ; les raisons peuvent en être les suivantes :

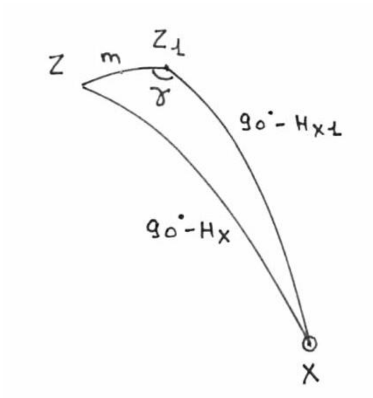
- facilité de la mesure de hauteur du Soleil par rapport à l'horizon,
- connaissance précise des éphémérides du Soleil,
- l'observation d'une étoile ou d'une planète nécessite une recherche préparatoire, le passage au méridien devant coïncider avec le crépuscule ou l'aube car ce n'est qu'à ces moments que l'horizon et l'astre sont visibles simultanément[1],
- l'étoile Polaire est peu brillante et n'est visible qu'en fin de crépuscule (phénomène inverse à l'aube) ; la mesure de sa hauteur est fréquemment imprécise, l'horizon étant alors flou.

Pour le cas où le Soleil ne pourrait être observé au moment de son passage au méridien (ou en son voisinage), on s'est attaché à trouver une autre méthode de calcul de la latitude : celle-ci consiste à effectuer deux mesures de hauteur de l'astre (double-altitude) à deux instants séparés ; l'intervalle de temps, mesuré de façon précise avec une bonne montre, sans pour autant qu'elle soit calée précisément sur le temps du méridien origine, permet d'évaluer la variation d'angle horaire de l'astre entre les deux observations.

Les deux hauteurs n'étant pas prises simultanément, il convient, à bord d'un navire en route, de corriger la variation d'angle horaire (ou d'angle au pôle) du déplacement en longitude entre les deux observations puis de réduire la première hauteur à l'horizon de la seconde. Si, entre les deux observations, le zénith de l'observateur se déplace de Z_1 en Z, d'une distance m (en milles), dans une direction γ par rapport à celle du vertical de l'astre X, la hauteur vraie mesurée H_{x1} doit être corrigée[2] de la quantité m.cosγ pour obtenir la hauteur réduite H_x qui interviendra dans les calculs :

$$\mathrm{H_x} = \mathrm{H_{x1}} - \mathrm{m}.\cos\gamma$$

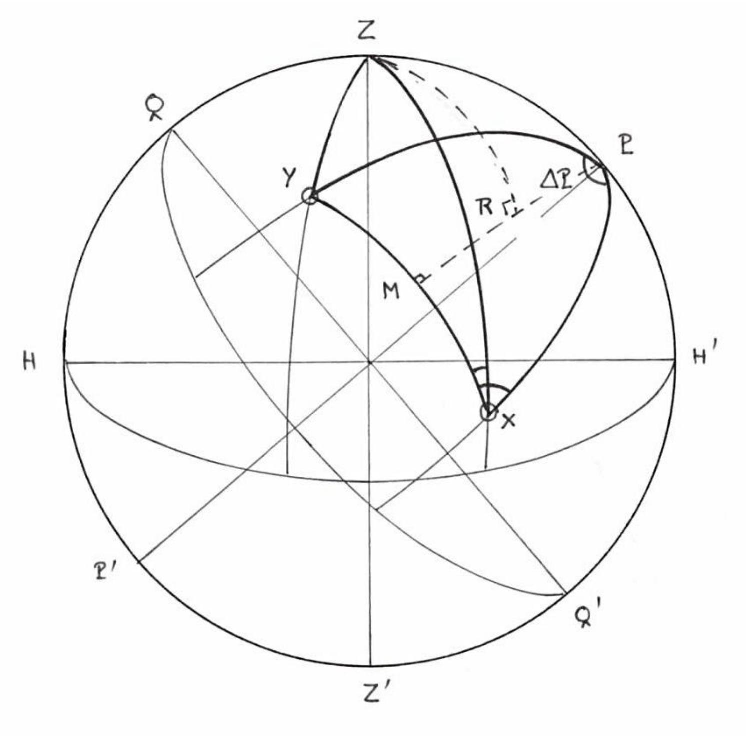
[1] Le passage au méridien de la Lune ou de Vénus peut s'observer en plein jour.
[2] Voir la démonstration dans, par exemple, le Traité de Navigation de V. M. Caillet de 1861, page 218.



Nota : on remarquera que l'angle γ est le gisement de l'astre s'il n'y a pas de dérive (vent et/ou courant) ; pour effectuer la correction, il est nécessaire de connaître l'azimut de l'astre (mesure ou calcul approché) que l'on retranchera de l'angle de route fond suivie pour obtenir l'angle γ.

Les différentes méthodes qui ont été développées sont applicables aux observations successives d'un même astre, tout naturellement le Soleil. Cependant, plusieurs d'entre elles sont générales et peuvent être appliquées à deux observations d'astres distincts et de différente nature tandis qu'une autre est spécifique aux observations d'étoiles.

Dans les raisonnements et explications qui suivent, on repèrera, sur la sphère locale, X la première position de l'astre et Y la seconde ; H_x est la première hauteur vraie mesurée et, le cas échéant, réduite ; H_y est la seconde. On admettra de plus que les deux hauteurs sont prises d'un même côté du méridien et que $H_x < H_y$. La latitude φ à calculer est celle correspondant à l'instant de la seconde observation.



Aux instants d'observation, on note D_x et D_y les valeurs de déclinaisons de l'astre, δ_x et δ_y les distances polaires correspondantes ; les angles au pôle sont notés P_x et P_y (inconnus) et leur différence, connue et corrigée du déplacement en longitude, est $\Delta P = P_x - P_y$.

D’autres cas de figure peuvent être rencontrés, notamment ceux relatifs aux observations faites de part et d’autre du méridien. Une simple analyse sur la sphère locale permettra d’adapter les formulations développées ci-après.

Les triangles de position PZX et PZY sont construits à partir du pôle élevé P avec les conventions de signe usuelles. Les différentes relations trigonométriques qui serviront à résoudre le problème seront établies dans les triangles sphériques PXY, ZXY, PZX et PZY dont les éléments utiles sont les suivants :

Triangle PXY	
PX PY XY Angle en P Angle en X	$90° - D_x = \delta_x$ $90° - D_y = \delta_y$ inconnu ΔP X’ inconnu
Triangle ZXY	
ZX ZY XY Angle en X	$90° - H_x = N_x$ $90° - H_y = N_y$ inconnu X’’ inconnu
Triangle PZX	
ZP PX ZX Angle en P Angle en X	$90° - \varphi$, inconnu $90° - D_x = \delta_x$ $90° - H_x = N_x$ P_x, inconnu X’ – X’’
Triangle PZY	
ZP PY ZY Angle en P	$90° - \varphi$, inconnu $90° - D_y = \delta_y$ $90° - H_y = N_y$ P_y, inconnu

Les éléments de calculs et notations sont communs aux méthodes explicitées ci-après.

1. *Méthode de Nicolas Fatio de Duillier (1728) :*

Nicholas Fatio de Duillier (1664-1753), mathématicien suisse, fut le premier à mettre au point une méthode exacte et purement mathématique (ou trigonométrique) pour résoudre le problème. Son auteur l’expose dans un opuscule intitulé « Navigation Improved » publié en 1728. La méthode consiste à :

1) Calculer l’arc XY dans le triangle PXY,
2) Calculer l’angle X’ dans le triangle PXY,
3) Calculer l’angle X’’ dans le triangle ZXY,
4) Evaluer l’angle en X du triangle PZX, égal à X’ – X’’ et calculer le côté ZP de ce triangle d’où l’on déduira la latitude.

Dans le principe, les quatre calculs trigonométriques à effectuer ne font appel qu’à la seule formule fondamentale, relation entre les trois côtés et un angle ; on obtient ainsi :

$$\cos XY = \sin D_x . \sin D_y + \cos D_x . \cos D_y . \cos \Delta P \quad (1)$$

$$\cos X' = \frac{\sin D_y - \cos XY \,.\, \sin D_x}{\sin XY \,.\, \cos D_x} \quad (2)$$

$$\cos X'' = \frac{\sin H_y - \cos XY \,.\, \sin H_x}{\sin XY \,.\, \cos H_x} \quad (3)$$

$$\sin \varphi = \sin D_x . \sin H_x + \cos D_x . \cos H_x . \cos(X' - X'') \quad (4)$$

En France, cette méthode est présentée par le mathématicien Etienne Bézout (1730-1783), dans son « Traité de Navigation » dont une première édition fut publiée en 1769[3]. Ce dernier simplifie la formulation en appliquant le problème aux seules observations du Soleil et en utilisant la valeur moyenne de déclinaison entre les deux observations, admettant ainsi que le triangle PXY est isocèle ; il décompose ensuite ce triangle suivant la hauteur sphérique issue de P en deux triangles rectangles égaux PMX et PMY. Cette décomposition donne accès à l'arc XY et à l'angle X'. X'' et la latitude sont ensuite calculées à l'aide de formules intégralement calculables par logarithmes. En effet, pour être calculées selon les usages de l'époque, les formules ne doivent comporter que des produits ou quotients de fonctions trigonométriques transposables immédiatement en sommes ou différences de logarithmes. La méthode de Duillier a également été présentée très succinctement, et de façon analogue, par Joseph Ducom[4] dans la 1re édition de son « Cours d'observations nautiques » (1820).

Pour résoudre l'ensemble de ce problème, plusieurs solutions ont été mises au point au fil du temps et on retiendra :

a) Première version dans laquelle on exprime tout d'abord l'arc XY avec la formule (1) et l'angle X' selon la formule des cotangentes. On définit ensuite un arc auxiliaire[5] α tel que :

$$\tan \alpha = \tan \delta_y . \cos \Delta P$$

Avec l'introduction de cet arc, et après transformations, les formules s'écrivent :

$$\cos XY = \frac{\cos \delta_y}{\cos \alpha} . \cos(\delta_x - \alpha) \quad (1')$$

$$\tan X' = \frac{\tan \Delta P \,.\, \sin \alpha}{\sin(\delta_x - \alpha)} \quad (2')$$

Après avoir posé $2s = XY + H_x + H_y$, l'angle X'' est ensuite calculé par l'une des formule de Borda :

$$\sin \frac{X''}{2} = \sqrt{\frac{\cos s \,.\, \sin(s - H_y)}{\cos H_X \,.\, \sin XY}} \quad \text{ou} \quad \cos \frac{X''}{2} = \sqrt{\frac{\cos(s - XY) \,.\, \sin(s - H_x)}{\cos H_X \,.\, \sin XY}} \quad (3')$$

La formule (4) permettant d'extraire la latitude est également transformée par introduction d'un arc auxiliaire β tel que :

$$\tan \beta = \cot H_x . \cos(X' - X'')$$

D'où l'on déduit :

---

3 D'autres éditions furent publiées dont, notamment, celle de 1814, revue et augmentée par le Capitaine de Vaisseau de Rossel. Voir aussi « Histoire du point astronomique en mer » par J. J. Ségéric, page 253.

4 Voir la bibliographie présentée par Olivier Chapuis dans « A la mer comme au ciel », page 816.

5 Géométriquement, cet arc est porté par le cercle horaire PX, jusqu'au pied de la hauteur issue de Y.

$$\sin\varphi = \frac{\sin H_x.\cos(\delta_x - \beta)}{\cos\beta} \quad (4')$$

E. Bézout calcule X'' par l'une des formules (3') puis détermine la latitude selon encore une autre décomposition.

La version présentée ci-dessus est utilisée telle quelle par F. J. Dubus dans ses Types de Calculs de Navigation (2e édition 1853 ; calcul n° 60) ; elle est exposée en détail dans le Traité de Navigation de Vincent-Marie Caillet[6] (3e édition, 1861).

b) Seconde version dans laquelle la formule fondamentale est exprimée avec les fonctions haversine (ou versine) et sinus (formules 1 et 4) puis, pour les calculs d'angle (formules 2 et 3), transformée en produits de fonctions trigonométriques ; on obtient :

$$\mathrm{hav}(XY) = \mathrm{hav}\left(\delta_x - \delta_y\right) + \sin\delta_x.\sin\delta_y.\mathrm{hav}(\Delta P) \quad (1'')$$

On pose ensuite :

$$s = (\delta_x - XY) + \delta_y \ , \qquad d = (\delta_x - XY) - \delta_y \ , \qquad s' = (N_x - XY) + N_y \ , \qquad d' = (N_x - XY) - N_y$$

En utilisant la fonction haversine et les formules de transformation de somme en produits, l'équation (2) devient :

$$\mathrm{hav}(X') = \sqrt{\mathrm{hav}(s).\mathrm{hav}(d)}.\csc\delta_x.\csc XY \quad (2'')$$

Une transformation équivalente est appliquée à l'équation (3) qui devient :

$$\mathrm{hav}(X'') = \sqrt{\mathrm{hav}(s').\mathrm{hav}(d')}.\csc N_x.\csc XY \quad (3'')$$

La formule finale est enfin :

$$\mathrm{hav}(90° - \varphi) = \mathrm{hav}(\delta_x - N_x) + \sin\delta_x.\sin N_x.\mathrm{hav}(X' - X'') \quad (4'')$$

Cette seconde version est exposée dans le Traité de Navigation de W. R. Martin (3e édition 1899).

Quelle que soit la solution de calcul utilisée, la méthode de Duillier est générale : elle est applicable pour toutes les observations « doubles », d'un même astre comme de deux astres distincts, à court ou long intervalle.

Exemple :

Les données de calcul figurent dans le tableau ci-dessous ; la première hauteur a été réduite à l'horizon de la seconde.

Soleil					
H_x =	9° 12,0'	D_x =	7° 06,0' S	ΔP =	2h 33m 12s
H_y =	25° 18,0'	D_y =	7° 08,6' S	φ_e =	54° 12,0' N

Les calculs donnent :

XY	X'	X''	X' – X''	φ
37° 59,6'	92° 31,7'	60° 16,1'	32° 15,6'	53° 57,5' N

[6] Né en 1811 à Paimboeuf ; professeur d'hydrographie en 1833 et examinateur de la Marine en 1848.

Si on utilise la valeur moyenne de déclinaison, $D = (D_x + D_y)/2 = 7° 07{,}3'$ S, on obtient $\varphi = 54° 00{,}3'$ N.

2. *Méthode de Cornelius Douwes*[7] *(1740) :*

Cornelius Douwes était examinateur du Collège de l'Amirauté d'Amsterdam ; la méthode de calcul de latitude qu'il conçut alors fut publiée en Grande Bretagne en 1759 par J. Roberston, sans démonstration en 1759 puis justifiée en 1760 par H. Pemberton. Selon H. Cotter, cette méthode fut populaire chez les marins britanniques ; des tables particulières de calcul furent publiées sous l'autorité de N. Maskelyne (Astronomer Royal) en 1781 puis, en 1797, par Mendoza Rios.

La méthode n'est applicable pratiquement qu'à deux observations d'un même astre, séparées dans le temps, pour lesquelles on peut admettre $D_x \approx D_y$ (on notera alors la valeur commune retenue D). Cette méthode, utilisant des approximations successives, repose sur la connaissance d'une latitude estimée φ_e à l'instant de la seconde observation.

P_x et P_y étant les angles au pôle, inconnus, de l'astre lors de la 1re puis de la seconde observation, la formule fondamentale appliquée aux deux triangles de position successifs PZX et PZY donne :

$$\sin H_x = \sin\varphi . \sin D + \cos\varphi . \cos D . \cos P_x \quad \text{et} \quad \sin H_y = \sin\varphi . \sin D + \cos\varphi . \cos D . \cos P_y$$

La différence membre à membre donne :

$$\sin H_y - \sin H_x = \cos\varphi . \cos D . (\cos P_y - \cos P_x)$$

La transformation de la différence de sinus (membre de gauche) et de la différence de cosinus (membre de droite) en produits permet d'écrire :

$$\sin\frac{P_x + P_y}{2} = \frac{\cos\dfrac{H_x + H_y}{2} . \sin\dfrac{H_y - H_x}{2}}{\cos\varphi . \cos D . \sin\dfrac{P_x - P_y}{2}}$$

En posant $\varphi \approx \varphi_e$ cette relation permet de calculer une valeur approchée de la somme des angles au pôle ; connaissant leur différence $P_x - P_y = \Delta P$, il est ensuite possible d'évaluer chacun de ces angles P_x et P_y.

En écrivant :

$$\cos P_x = 1 - 2 . \left(\sin\frac{P_x}{2}\right)^2 \quad \text{et} \quad \cos P_y = 1 - 2 . \left(\sin\frac{P_y}{2}\right)^2$$

les formules fondamentales écrites initialement deviennent :

$$\cos(\varphi - D) = \sin H_x + 2 . \cos\varphi . \cos D . \left(\sin\frac{P_x}{2}\right)^2 = \sin H_y + 2 . \cos\varphi . \cos D . \left(\sin\frac{P_y}{2}\right)^2$$

Cette relation permet, en portant φ_e dans l'un des membres de droite, de calculer $\varphi - D$ d'où l'on déduira ensuite une valeur approchée de la latitude φ. Si la valeur trouvée est très différente de la latitude estimée, on effectuera une seconde itération.

La méthode est présentée, d'un point de vue pratique, dans « A Complete Epitome of Practical Navigation » de J. W. Norie dans l'édition de 1839 (12e édition).

<u>Exemple</u> (les données sont celles de l'exemple précédent ; on utilise la valeur moyenne de déclinaison) :

---

[7] Ne pas confondre cette méthode avec le « problème de Douwes » relatif à la recherche des coordonnées des points d'intersection de deux cercles de hauteur.

Les calculs donnent : $P_x = 63° 46,0'$, $P_y = 25° 28,0'$, $(\varphi_1 - D) = 60° 04,1'$, $\varphi_1 = 53° 57'$ N.

Une seconde itération, avec la valeur φ_1 trouvée donne : $P_x = 63° 25,7'$, $P_y = 25° 07,7'$ et $\varphi_2 = 54° 01'$ N.

La troisième itération, avec φ_2 donne : $P_x = 63° 31,1'$, $P_y = 25° 13,1'$ et $\varphi_3 = 54° 00'$ N.

3. Méthode de Samuel Dunn (1776-1777) :

La méthode conçue par Samuel Dunn, professeur de mathématiques à Londres, fut publiée par son auteur dans deux ouvrages : « A New Atlas » et « A New Epitome of Navigation » en 1776-1777 ; elle est résolument nouvelle et est basée sur le principe du « trial and error » ou, selon la terminologie française de l'époque, de la « fausse position » ; elle préfigure les évolutions à venir dans le domaine des sciences nautiques.

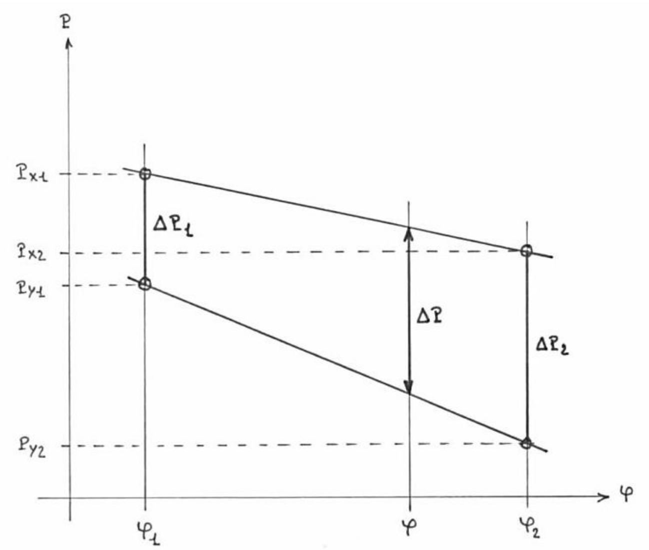
Les données de calcul sont, comme pour les autres méthodes, les deux hauteurs vraies (la première étant le cas échéant réduite à l'horizon de la seconde), les deux valeurs de déclinaison et la différence d'angle horaire ; il est nécessaire également de connaître la latitude estimée φ_e à l'instant de la seconde observation. La méthode est générale et peut être appliquée à deux observations successives du même astre (Soleil) comme à deux observations, quasi-simultanées ou non, d'astres distincts.

Le principe de calcul est le suivant :

Pour une valeur arbitraire φ_1 de la latitude, voisine de φ_e, il est possible de calculer les angles au pôle P_{x1} et P_{y1} correspondant aux deux observations et d'en déduire une différence d'angle au pôle $\Delta P_1 = P_{x1} - P_{y1}$.

On peut fixer ensuite une autre valeur arbitraire φ_2 de la latitude, voisine de φ_e et telle que $\varphi_1 < \varphi_e < \varphi_2$ et effectuer les mêmes calculs donnant les angles au pôle P_{x2} et P_{y2} et la différence $\Delta P_2 = P_{x2} - P_{y2}$.

On calcule ensuite une valeur approchée de la latitude en admettant que, dans la limite de précision fixée, les variations des angles horaires sont proportionnelles à celles des latitudes. La figure ci-dessous en donne une représentation graphique.



On obtient ainsi :

$$\frac{\Delta P_2 - \Delta P_1}{\varphi_2 - \varphi_1} = \frac{\Delta P - \Delta P_1}{\varphi - \varphi_1} = m$$

D’où la latitude :

$$\varphi = \varphi_1 + \frac{\Delta P - \Delta P_1}{m}$$

D’une manière générale, on prendra comme valeurs arbitraires les deux latitudes entières encadrant la latitude estimée φ_e.

Le calcul des quatre angles au pôle[8] (P_{x1}, P_{x2}, P_{y1} et P_{y2}) s’effectue sur la base de la formule fondamentale :

$$\sin H_x = \sin \varphi_1 . \sin D_x + \cos \varphi_1 . \cos D_x . \cos P_{x1}$$

La formule est ensuite transformée pour être calculable par logarithmes et on obtient, par exemple :

$$\text{hav}(P_{x1}) = \sec \varphi_1 . \sec D_x . \sqrt{\text{hav}\big(N_x + (\varphi_1 - D_x)\big) . \text{hav}\big(N_x - (\varphi_1 - D_x)\big)}$$

On peut également utiliser la formule de Borda :

$$\sin \frac{P_{x1}}{2} = \sqrt{\sec \varphi_1 . \csc \delta_x . \cos s . \sin(s - H_x)} \quad \text{avec} \quad 2s = (\delta_x + \varphi_1 + H_x)$$

Nota 1 : dans son « Traité de Navigation » (3[e] édition de 1861, page 225), V. M. Caillet donne les explications nécessaires à l’application de cette méthode de calcul qu’il attribue à J. Lalande ; ce dernier serait en effet le premier à l’avoir proposée en 1764.

Nota 2 : la formule de calcul des angles au pôle est à exécuter quatre fois ; le calcul sera, dans une certaine mesure, allégé si on dispose d’une table donnant les angles horaires en fonction de la latitude, la déclinaison et la hauteur comme les « Horary Tables » de Thomas Lynn publiées en 1827 ; l’avantage est relatif compte tenu des interpolations doubles qu’il y aura lieu d’effectuer.

Exemple (les données sont celles de l’exemple précédent ; on utilise la valeur moyenne de déclinaison) :

On choisit φ_1 = 53° 30’ N et φ_2 = 54° 30’ N. On obtient les angles au pôle et différences suivantes :

P_{x1} =	4h 15m 39s	P_{x2} =	4h 12m 21s		
P_{y1} =	1h 47m 03s	P_{y2} =	1h 34m 08s		
ΔP_1 =	2h 28m 36s	ΔP_2 =	2h 38m 13s	ΔP =	2h 33m 12s

On a ensuite :

$$m = \frac{\Delta P_2 - \Delta P_1}{\varphi_2 - \varphi_1} = 0{,}1603 \text{ minutes}/'$$

On a enfin :

$$\varphi = \varphi_1 + \frac{\Delta P - \Delta P_1}{m} = 53°\ 58{,}7'\text{N}$$

Comme il a été indiqué au début de ce chapitre, la méthode conçue par Samuel Dunn préfigure les évolutions à venir dans le domaine de la navigation astronomique : elle est notamment à rapprocher de la « découverte » de Thomas H. Sumner en 1837. En effet, en reprenant le cas de figure relatif à l’exemple ci-dessus, on peut construire, et remplir, le tableau suivant :

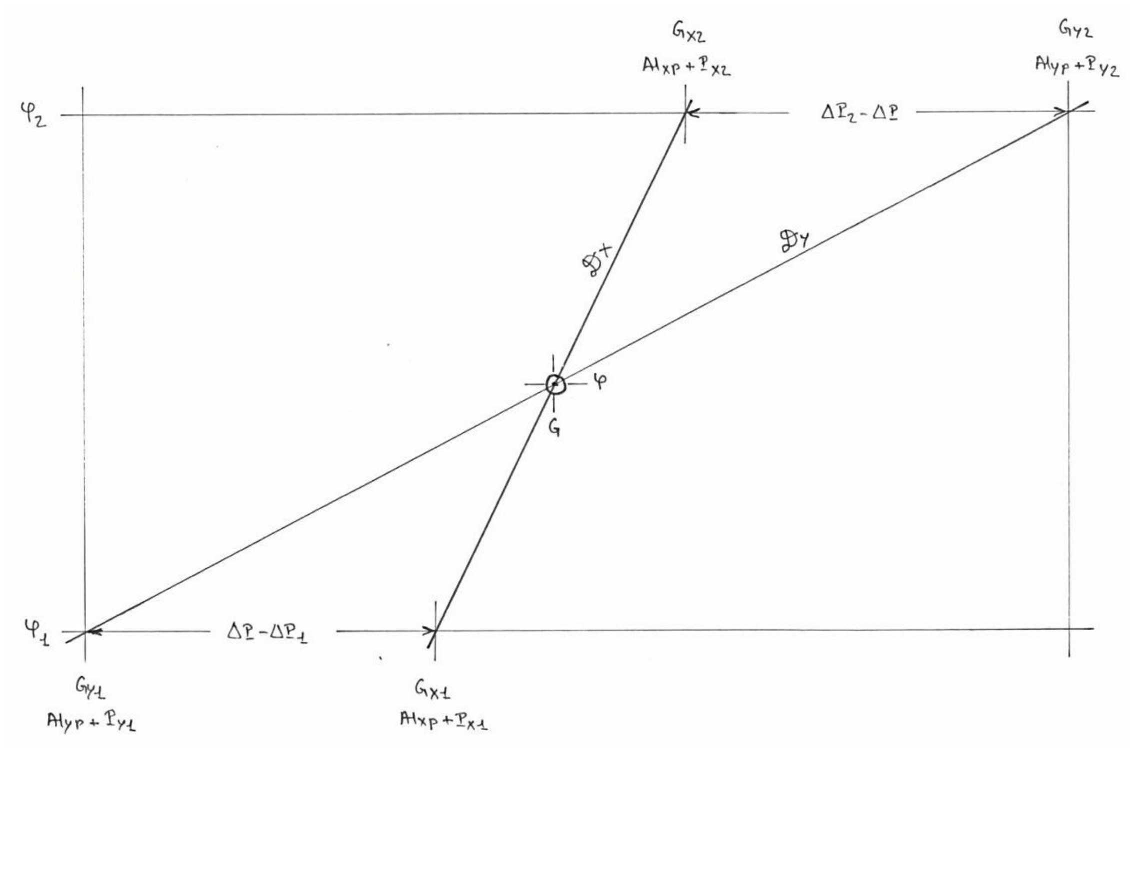
[8] On n’explicite ici que le calcul du premier angle au pôle P_{x1}.

Points du cercle de hauteur 1re observation (Astre X, H_x)	φ_1 arbitraire $\varphi_2 = \varphi_1 + 1°$	$G_{x1} = AHxp + P_{x1}$ $G_{x2} = AHxp + P_{x2}$
		$G_{x2} - G_{x1} = P_{x2} - P_{x1}$
Points du cercle de hauteur 2e observation (Astre Y, H_y)	φ_1 arbitraire $\varphi_2 = \varphi_1 + 1°$	$G_{y1} = AHyp + P_{x1}$ $G_{y2} = AHyp + P_{x2}$
		$G_{y2} - G_{y1} = P_{y2} - P_{y1}$

Si l'état absolu du chronomètre est connu, les instants d'observations peuvent être fixés par rapport au temps du méridien origine permettant ainsi de déterminer, avec les Ephémérides Nautiques, les angles horaires au premier méridien AHxp et AHyp et d'avoir accès aux coordonnées géographiques des points des lieux de position. On peut alors construire sur la carte marine, comme l'a fait Th. Sumner, des droites sous-tendant les arcs de courbes de hauteur et obtenir, à leur intersection, le point du navire.

Si on n'a qu'une connaissance approximative de l'état absolu, il n'est plus possible de « caler » précisément les longitudes sur le méridien origine ; il est par contre possible de reconstituer le graphique de point, sans référence de longitude, en remarquant que $G_{y1} - G_{x1} = \Delta P - \Delta P_1$ et que $G_{x2} - G_{y2} = \Delta P_2 - \Delta P$.

La figure ci-après est relative à la configuration de l'exemple, $\mathscr{D}_x$ et $\mathscr{D}_y$ étant les deux droites de hauteur construites selon la méthode de Th. Sumner.



4. *Méthode présentée par Joseph Ducom (1820) :*

C'est en fait une variante de la méthode de Samuel Dunn qui ne fait pas appel au processus du « trial and error » et s'exécute directement à partir de la latitude estimée. Cette procédure de calcul a été présentée par Joseph Ducom dans l'édition de 1820 de son « Cours d'observations nautiques » sous le nom de « méthode par deux angles horaires » ; elle anticipe les travaux de Louis Pagel en 1847.

Avec la latitude estimée à l'instant de la seconde observation, φ_e, et les autres données, on calcule les deux angles au pôle P_{xe} et P_{ye} ainsi que les azimuts de l'astre Z_{xe} et Z_{ye} ; on utilise pour ces différents calculs la formule de Borda par exemple[9]. On compare ensuite les différences d'angles au pôle, estimée $P_{xe} - P_{ye}$ et mesurée (ou observée) $\Delta P = P_{xo} - P_{yo}$. Cette différence s'écrit :

$$(P_{xe} - P_{ye}) - (\Delta P) = (P_{xe} - P_{xo}) - (P_{ye} - P_{yo}) = \Delta\varphi.p_x - \Delta\varphi.p_y$$

Expression dans laquelle $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_e$ est l'écart entre latitudes estimée et observée et les coefficients p_x et p_y sont les variations d'angles au pôle correspondant à une variation de latitude de 1' (qui seront appelées plus tard « coefficients Pagel ») et dont les expressions[10] sont :

$$p_x = \cot Z_{xe}.\sec\varphi_e \quad \text{et} \quad p_y = \cot Z_{ye}.\sec\varphi_e$$

Ces coefficients peuvent être calculés en fonction de la latitude et de l'azimut (ou de l'amplitude) à l'aide d'une table annexée à l'ouvrage (Table XII).

On obtient donc :

$$\varphi = \varphi_e \pm \frac{(P_{xe} - P_{ye}) - \Delta P}{p_x - p_y}$$

Les règles de signe indiquées par J. Ducom sont fonction des positions de l'astre par rapport au méridien et au premier vertical. Si on peut se contenter de mesurer les azimuts, le calcul est plus expéditif qu'avec la méthode de S. Dunn.

Cette méthode est également présentée dans le traité de Henry Raper[11] « The Practice of Navigation and Nautical Astronomy » avec une formulation légèrement différente puisqu'elle ne fait pas apparaître les coefficients Pagel ; la formule est obtenue en développant les cotangentes :

$$\varphi = \varphi_e \pm \left[(P_{xe} - P_{ye}) - \Delta P\right].\cos\varphi_e.\frac{\sin Z_{xe}.\sin Z_{ye}}{\sin(Z_{ye} - Z_{xe})}$$

Une table (n° 71) figure dans le traité de H. Raper (18e édition, 1887) pour effectuer le calcul du dernier facteur de l'expression ci-dessus.

<u>Exemple</u> (les données sont celles de l'exemple précédent ; on utilise la valeur moyenne de déclinaison) :

Les calculs donnent :

P_{xe} =	4h 13m 22s	Z_{xe} =	S63,9°E	p_x =	0,84
P_{ye} =	1h 38m 15s	Z_{ye} =	S27,1°E	p_y =	3,34
$P_{xe} - P_{ye}$ =	2h 35m 07s			$p_x - p_y$ =	- 2,50

Avec ΔP = 2h 33m 12s, on obtient une variation de différence d'angle au pôle de 1m 55s, soit de 28,75', ce qui donne une variation de latitude de -28,75/2,5 = -11,5'. La latitude observée est donc φ = 54° 00,5' N.

[9] Si l'astre est suffisamment bas sur l'horizon, on pourra mesurer les azimuts.

[10] Ces expressions s'obtiennent par différentiation de la formule fondamentale ; elles ont ici données pour des variations exprimées dans les mêmes unités.

[11] 1799- 1859, lieutenant dans la Royal Navy. La première édition du traité de navigation de H. Raper remonte à 1840.

5. Méthode de Pierre Caillet (1818) et de James Ivory (1821) :

Cette méthode, basée sur la résolution de triangles rectangles, suppose que l'on puisse admettre que $D_x \approx D_y$ (valeur commune retenue notée D) : elle n'est donc applicable qu'aux observations successives d'un même astre. Elle fut tout d'abord mise au point en 1818 par le professeur d'hydrographie Pierre Caillet[12] et publiée dans son « Manuel du Navigateur ». En 1821, James Ivory, professeur de mathématiques au Royal Military College de Sandhurst publia cette même méthode dans ses « Philosophical Transcriptions ». En Grande-Bretagne, le nom de ce dernier reste attaché à la méthode[13].

A partir du pôle élevé P (voir sphère locale représentée en page 2), on abaisse la perpendiculaire sphérique à l'arc de grand cercle XY. Le point d'intersection M partage l'arc XY en deux arcs égaux MX et MY (MX = MY = XY/2) ; les angles sphériques MPX et MPY sont égaux et ont pour valeur angulaire ΔP/2.

A partir du zénith Z, on abaisse la perpendiculaire sphérique à l'arc de grand cercle PM ; le point d'intersection est R. La latitude φ se détermine dans le triangle rectangle PZR après avoir calculé ZR et PR :

$$\sin\varphi = \cos \mathrm{ZR}.\cos \mathrm{PR} \quad (5)$$

Dans le triangle rectangle PMX, on a les relations :

$$\sin\frac{\mathrm{XY}}{2} = \sin\frac{\Delta \mathrm{P}}{2}.\cos \mathrm{D} \quad (6) \text{ et } \quad \cos \mathrm{PM} = \sin \mathrm{D}\,.\sec\frac{\mathrm{XY}}{2} \quad (7)$$

On a ensuite, dans le triangle rectangle ZMR :

$$\cos \mathrm{ZM} = \cos \mathrm{ZR}.\cos \mathrm{MR} \quad (8) \text{ et } \quad \sin \mathrm{ZR} = \sin \mathrm{ZM}.\sin \mathrm{ZMR} \quad (9)$$

En remarquant que l'angle ZMY = 90° - ZMR, on a, dans le triangle ZMY :

$$\sin \mathrm{H_y} = \cos \mathrm{ZM}.\cos\frac{\mathrm{XY}}{2} + \sin \mathrm{ZM}\,.\sin\frac{\mathrm{XY}}{2}.\sin \mathrm{ZMR} \quad (10)$$

En remarquant que l'angle ZMX = 180° - ZMY = 90° + ZMR, on a dans le triangle ZMX :

$$\sin \mathrm{H_x} = \cos \mathrm{ZM}.\cos\frac{\mathrm{XY}}{2} - \sin \mathrm{ZM}\,.\sin\frac{\mathrm{XY}}{2}.\sin \mathrm{ZMR} \quad (11)$$

La somme membres à membres des équations (10) et (11) donne :

$$\sin \mathrm{H_x} + \sin \mathrm{H_y} = 2.\cos \mathrm{ZM}.\cos\frac{\mathrm{XY}}{2} \quad (12)$$

La différence membre à membre de ces équations donne :

$$\sin \mathrm{H_y} - \sin \mathrm{H_x} = 2.\sin \mathrm{ZM}.\sin\frac{\mathrm{XY}}{2}.\sin \mathrm{ZMR} \quad (13)$$

Dans ces deux dernières relations, on remplace cosZM et sinZM par leurs expressions tirées des formules (8) et (9) ; on obtient :

$$\sin \mathrm{H_x} + \sin \mathrm{H_y} = 2.\cos \mathrm{ZR}.\cos \mathrm{MR}.\cos\frac{\mathrm{XY}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \mathrm{H_y} - \sin \mathrm{H_x} = 2.\sin \mathrm{ZR}.\sin\frac{\mathrm{XY}}{2}$$

En transformant la somme et la différence de sinus en produits, on obtient ensuite :

---

[12] 1769-1839 ; professeur d'hydrographie à Paimboeuf, père de Vincent-Marie Caillet.

[13] Voir également « Nouvelles Annales de Mathématiques », 1re série, tome 13, 1854, page 368 ainsi que le traité de navigation de V. M. Caillet à la page 220 (édition de 1861)..

$$\sin \mathrm{ZR} = \frac{\cos\frac{\mathrm{H_y}+\mathrm{H_x}}{2}.\sin\frac{\mathrm{H_y}-\mathrm{H_x}}{2}}{\sin\frac{\mathrm{XY}}{2}} \quad (14) \quad \cos \mathrm{MR} = \frac{\sin\frac{\mathrm{H_y}+\mathrm{H_x}}{2}.\cos\frac{\mathrm{H_y}-\mathrm{H_x}}{2}}{\cos \mathrm{ZR}.\cos\frac{\mathrm{XY}}{2}} \quad (15)$$

La formule (13) permet le calcul de ZR et la formule (14) celui de MR ; on obtient PR par différence entre PM, obtenu par la formule (6) et MR obtenu par la formule (14). La latitude s'obtient enfin par la formule (5).

Malgré la complexité apparente de la formulation, la latitude se détermine assez simplement une fois calculées la déclinaison (valeur moyenne entre les deux observations) et les demi-somme et demi-différence des hauteurs :

1) Calcul de l'arc XY par la formule (6) ;
2) Calcul de l'arc PM par la formule (7) ;
3) Calcul des arcs ZR et MR par les formules (14) et (15) ;
4) Calcul de l'arc PR = PM – MR puis de la latitude par la formule (5).

Toutes les formules utilisées sont logarithmiques.

Il est à noter que V. M. Caillet propose un terme correctif de la latitude trouvée pour tenir compte de l'éventuelle variation de déclinaison entre les deux prises de hauteur.

En France, cette méthode est décrite et utilisée par C. Guépratte dans ses « Problèmes d'astronomie nautique et de navigation » (3e édition, 1839) ainsi que par F. J. Dubus dans ses « Types de calculs de navigation et d'astronomie nautique » (2e édition, 1855, calcul n° 61) ; ce dernier fait référence à Pierre Caillet.

En Grande-Bretagne, la procédure opératoire de cette méthode fait l'objet d'instructions précises et d'exemples numériques dans les traités de J. W. Norie, de H. Raper, de W. H. Rosser et de W. R. Martin..

<u>Exemple</u> (les données sont celles de l'exemple précédent ; on utilise la valeur moyenne de déclinaison) :

Les calculs donnent successivement :

$(H_x + H_y)/2$	$(H_y - H_x)/2$	XY	PM	ZR	MR	PR
17° 15,0'	8° 03,0'	37° 59,6'	97° 32,1'	24° 15,5'	70° 05,2'	27° 26,9'

D'où la latitude φ = 54° 00,3' N.

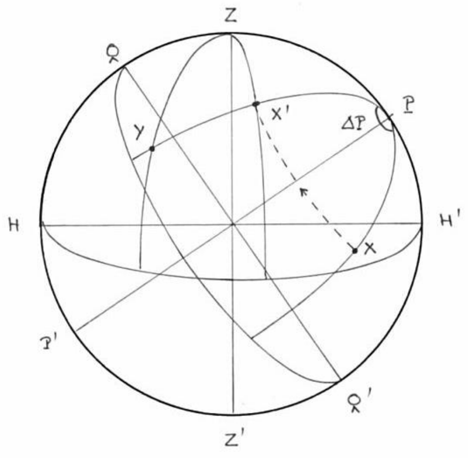
6. Méthode de Thomas Lynn (1825) :

Thomas Lynn était Commander à la Compagnie des Indes Orientales et examinateur des officiers de cette compagnie. Il est l'auteur de plusieurs ouvrages de navigation ainsi que de tables de navigation[14]. En 1825, il conçoit une méthode de calcul de la latitude basée sur deux observations successives de deux étoiles ; cette méthode est publiée dans son ouvrage « Navigation ». Le principe, simple, en est le suivant.

On choisit deux étoiles X et Y observables, présentant une faible différence d'ascension droite ΔARa et une différence de déclinaison ΔD aussi importante que possible. On note Y l'étoile la plus à l'ouest (Y passera

[14] Ces ouvrages et tables sont mentionnés dans le livre de Charles H. Cotter.

au méridien du lieu avant X). On commence par mesurer la hauteur de Y, H_y, puis on mesure la hauteur de X, $H_{x'}$, $\Delta P = \Delta ARa$ (temps sidéral[15]) plus tard. A ce second instant, l'étoile X est en X', sur le cercle horaire qu'occupait Y lors de la mesure de sa hauteur.



Dans le triangle ZX'Y, on connait les 3 côtés qui sont les deux distances zénithales et la différence des déclinaisons des deux étoiles ΔD. On peut donc calculer l'angle en Y :

$$\cos Y = \frac{\sin H_{x'} - \sin H_y . \cos \Delta D}{\cos H_y . \sin \Delta D}$$

On calcule ensuite directement la latitude dans le triangle ZPY :

$$\sin \varphi = \sin H_y . \sin D_y + \cos H_y . \cos D_y . \cos Y$$

Comme il a été vu avec les autres méthodes, les deux formules seront transformées pour pouvoir être, selon les usages de l'époque, entièrement calculables par logarithmes.

Il conviendra, le cas échéant, de réduire la première hauteur à l'horizon de la seconde.

Le calcul est simple mais la méthode n'est applicable qu'aux étoiles. La précision des observations peut être assez aléatoire compte tenu d'une visibilité plus ou moins nette de la ligne d'horizon si les observations sont effectuées hors crépuscule et aube.

<u>Exemple</u> :

Les données de calcul sont les suivantes :

X : Deneb ; Y : Antarès					
H_y =	12° 49,7'	D_y =	26° 27,6' S	AVa_y =	112° 25,9'
H'_x =	74° 20,5'	D_x =	45° 19,8' N	AVa_x =	49° 31,0'

La variation de temps sidéral est $\Delta P = \Delta AVa = 62° 54{,}9'$, soit Δt = 4h 10m 58s de temps moyen, et la différence de déclinaison est $\Delta D = 71° 47{,}4'$.

On trouve $Y = 15° 16{,}3'$ et $\varphi = 48° 00{,}0'$ N.

[15] L'intervalle de temps moyen correspondant est : $\Delta t = \Delta P.365{,}2422/366{,}2422 = 0{,}9972696.\Delta P$.

7. Cas particuliers des observations rapprochées et/ou voisines du méridien :

Si, quelle que soit leur proximité du méridien, les observations sont faites à court intervalle, les deux hauteurs sont voisines l'une de l'autre et la variation d'angle au pôle est petite ; des approximations peuvent alors être faites, simplifiant les formules. Dans son traité de navigation, V. M. Caillet propose les formules suivantes :

$$\frac{XY}{2} = \frac{\Delta P}{2}.\cos D \quad (6') \quad , \quad PM = 90° - D = \delta \quad (7')$$

puis :

$$\sin ZR = \frac{(H_y - H_x).\cos\frac{H_y + H_x}{2}}{\Delta P.\cos D} \quad (14') \quad , \quad \cos MR = \sin\frac{H_y + H_x}{2}.\sec ZR \quad (15')$$

et enfin :

$$\sin\varphi = \cos ZR.\cos(\delta - MR) \quad (5')$$

Si maintenant, on considère que ces deux observations rapprochées ont été faites à proximité du méridien, on évalue, avec la latitude estimée φ_e, l'angle au pôle moyen relatif aux deux observations ; on a, dans le triangle sphérique rectangle ZPR (voir figure en page 2) :

$$\sin P_{moy} = \frac{\sin ZR}{\cos\varphi_e}$$

En utilisant ensuite les relations (6') et (14') établies ci-dessus, on obtient :

$$\sin P_{moy} = \frac{(H_y - H_x).\cos\frac{H_x + H_y}{2}}{\Delta P.\cos\varphi_e.\cos D}$$

De cette relation, on déduit l'angle au pôle moyen P_{moy} à partir duquel on déterminera l'angle au pôle P_y correspondant à l'observation la plus proche du méridien :

$$P_y = P_{moy} - \frac{\Delta P}{2}$$

Après avoir vérifié que cet angle au pôle est inférieur à l'angle au pôle limite P_L d'application de la méthode des circumméridiennes[16], on calculera la réduction au méridien $r = \alpha.P_y^2$ en fonction de la latitude estimée et de la déclinaison de l'astre puis la distance zénithale $N_0 = N_y - r$ et enfin la latitude $\varphi = N_0 + D_y$.

Enfin, si on considère des observations éloignées l'une de l'autre dont l'une a été observée au voisinage du méridien, on peut procéder de la façon suivante :

- connaissant la latitude estimée, on évalue, à l'aide de la formule de Borda, l'angle au pôle relatif à l'observation la plus éloignée du méridien, P_x (le calcul est précis si l'observation est prise au voisinage du premier vertical) ;
- l'angle au pôle relatif à l'observation la plus proche du méridien est alors $P_y = P_x - \Delta P$;
- si $P_y < P_L$, angle au pôle limite d'application de la méthode des circumméridiennes, on calculera la latitude comme dans le cas précédent.

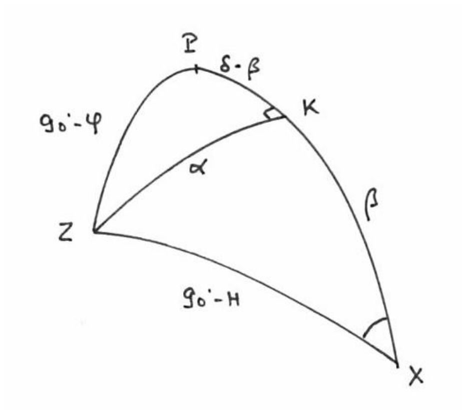
[16] Voir fiche relative aux observations circumméridiennes.

Outre la référence à l'ouvrage de V. M. Caillet, ces méthodes particulières sont indiquées dans le traité de H. Raper « The Practice of Navigation and Nautical Astronomy ». Ce traité comporte, dans sa 18e édition (1887), une trentaine de page d'explications concises et détaillées sur le traitement du « Double-Altitude Problem » ; tous les cas de figure y sont envisagés, accompagnés de règles d'emploi et d'exemples.

8. Latitude par la variation de hauteur en fonction du temps :

Cette méthode est décrite par Joseph Ducom dans son « Cours d'observations nautiques » publié en 1820 sous le nom de « latitude par une hauteur non méridienne déduite de deux hauteurs prises à très court espace de temps ». Selon J. Ducom, il s'agit d'une méthode expérimentale qui n'a fait ses preuves qu'à terre.

De deux mesures de hauteur rapprochées du Soleil H_x et H_y, on évalue la hauteur moyenne H et la variation de hauteur ΔH, en minutes et dixièmes ; la mesure de l'intervalle de temps Δt entre les deux prises de hauteur donne directement la variation d'angle au pôle ΔP que l'on exprimera en minutes et décimales. On peut ensuite évaluer le taux de variations de la hauteur ΔH/ΔP en minutes d'arc par minutes de temps.



La différentiation de la formule fondamentale donne, en valeur absolue et compte tenu des unités :

$$\frac{\Delta H}{\Delta P} = 15.\frac{\cos\varphi.\cos D\,.\sin P}{\cos H}$$

D'autre part, l'analogie des sinus dans le triangle de position PZX donne :

$$\sin X = \frac{\sin P\,.\cos\varphi}{\cos H}$$

de l'équation de départ, on obtient donc :

$$\sin X = \frac{\Delta H}{\Delta P}.\frac{1}{15.\cos D}$$

dont on déduit la valeur de l'angle à l'astre X.

Pour calculer la latitude, J. Ducom décompose ensuite le triangle de position en deux triangles rectangles selon la hauteur issue de Z. En posant α = ZK et β = XK, on obtient successivement :

$$\tan\beta = \cos X.\cot H \quad \text{et} \quad \cos\alpha = \sin H.\sec\beta$$

D'où l'on déduit la latitude :

$$\sin\varphi = \cos(\delta - \beta).\cos\alpha = \cos(\delta - \beta).\sin H.\sec\beta$$

La méthode est séduisante mais sa précision repose sur la bonne détermination du taux de variation qui doit être évalué sur un intervalle de temps ni trop court, pour limiter l'influence des erreurs de mesure de hauteur, ni trop long, pour que l'on puisse considérer la variation de hauteur comme linéaire. Joseph Ducom indique notamment :

- d'éviter les observations au voisinage du premier vertical (circonstances défavorables),
- de considérer comme circonstances favorables un taux de variation de hauteur inférieur à 7' par minute,
- d'adopter un intervalle de temps entre les hauteurs de 12 minutes,
- de faire stopper le navire pendant l'intervalle de temps nécessaire à la mesure des hauteurs,
- de faire mesurer les hauteurs par le même observateur, avec le même instrument.

Exemple :

En un lieu de latitude Nord, la hauteur vraie moyenne du centre du Soleil est H = 9° 58,8', la différence entre les hauteurs est ΔH = 1° 33,6' et la variation d'angle au pôle est ΔP = 12m 00s. La déclinaison à l'instant moyen est D = 7° 06,0' S.

On obtient alors un taux de variation de la hauteur de 7,8'/min. Les formules donnent :

X = 31,6022° ; β = 78,3266° et α = 31,0703° ; la latitude calculée est φ = 54° 11' N.

Si, par suite d'incertitude de mesure, on avait obtenu un taux de variation de hauteur de 7,7'/min, la latitude calculée aurait été de 54° 35' N, soit un écart de 24' par rapport au premier calcul.

Remarque : La méthode a fait l'objet de recherches ultérieures dans le but de déterminer le point du navire, en latitude et longitude. Voir Bowditch, édition 1977, page 595 et la revue de l'Institut Français de Navigation n° 29 de janvier 1960 : « Détermination expéditive du point observé par la droite de vitesse ascensionnelle d'un astre » par René Hervieu, professeur d'hydrographie.

9. *Quelques commentaires :*

D'une manière générale, les différentes méthodes sont lourdes en calcul numérique et on peut se demander jusqu'à quel point elles ont été réellement appliquées à bord d'un navire[17] en route sachant, de plus, que l'ensemble de la procédure (observations et calculs) peut prendre plusieurs heures pour n'aboutir qu'à une simple valeur de latitude … Il n'en demeure pas moins que les différentes recherches afférentes ont contribué aux avancées de l'astronomie nautique.

Si, en France, les éléments d'étude de ce procédé de détermination de la latitude semblent avoir complètement disparu des manuels d'enseignement dans le courant de la seconde moitié du XIXe siècle, les traités britanniques développent encore le sujet tardivement[18]. Outre le traité de H. Raper, on remarque que l'édition de 1891 de l'ouvrage de W. H. Rosser « The Self Instructor in Navigation » consacre 26 pages à l'examen du « Double-Altitude Problem » : les solutions de J. Ivory (deux méthodes de traitement) et de N. F. de Duillier y sont développées selon différents cas de figure. L'étude rejoint ensuite le développement de la méthode de Th. Sumner et le calcul du point lorsque l'état absolu du chronomètre est connu. Enfin, la troisième édition (1899) du « Treatise on Navigation and Nautical Astronomy » de W. R. Martin expose les différentes méthodes classiques de résolution du « Double-Altitude Problem » sur 9 pages, exemples et notes à l'appui ; W. R. Martin conclut le chapitre consacré en indiquant que les méthodes de détermination du point développées par Sumner et Marcq de Saint-Hilaire « (…) *are so much more commonly employed*. »

[17] L'application est certaine à terre ou à bord d'un navire au mouillage, elle est probable à bord d'un navire de guerre en route, improbable à bord d'un navire de commerce en route.
[18] Il en est de même pour le calcul de longitude par la méthode des distances lunaires.