« CLOUDY WEATHER » JOHNSON

Alfred Challice Johnson (1828-1909) était *Naval Instructor* de la Royal Navy. Il a exercé cette fonction de 1855 à 1887 et est l'auteur de plusieurs ouvrages de navigation dont le plus connu est « On Finding Latitude and Longitude in Cloudy Weather » ; la popularité de cet opuscule fut telle que son titre est devenu indissociable du nom de son auteur. A. C. Johnson s'est essentiellement attaché à concevoir de courts manuels[1] explicitant des méthodes essentiellement pratiques et contenant l'ensemble des tables nécessaires à l'exécution des calculs décrits. Son principal objectif semble avoir été de permettre aux officiers de marine, militaire comme marchande, de s'affranchir de l'observation méridienne pour déterminer le point astronomique en toutes circonstances : ces principaux ouvrages mettent en effet à la disposition de l'observateur des méthodes et des outils de calculs simples pour élaborer le point à partir d'observations d'astres variés (astres errants et étoiles) prises à des instants quelconques.

1. *Brief and Simple Methods of Finding the Latitude & Longitude*

L'opuscule comporte une trentaine de pages au format de 16 cm sur 25 cm ; l'édition consultée est celle de 1884[2]. L'ouvrage est essentiellement consacré au calcul des éléments d'une droite de hauteur par la méthode du méridien estimé (procédé Borda) à l'aide d'un calcul approché, l'auteur privilégiant la rapidité et la sûreté du calcul. Pour traiter intégralement les différents problèmes exposés, il est nécessaire d'associer à l'opuscule une table de point (traverse table) permettant d'effectuer facilement les produits d'un nombre par le sinus ou le cosinus d'un angle.

L'opuscule comporte 18 pages d'instructions d'emploi détaillées, accompagnées de nombreux exemples, et 3 tables :

- table donnant les versines naturelles d'un angle compris entre 0° et 90° (0 h et 6 h) avec un intervalle d'argumentation de 1' (4 s) ; le résultat est exprimé avec 4 chiffres significatifs ;
- table donnant les logarithmes de la sécante d'un angle compris entre 0° et 64° avec un intervalle d'argumentation de 1' ; le résultat est exprimé avec 4 décimales ;
- table d'azimut.

Cette dernière est construite sur la base de la formule donnant l'azimut par l'heure et la hauteur :

$$\sin \mathrm{Z} = \frac{\sin \mathrm{P} \,.\, \cos \mathrm{D}}{\cos \mathrm{H}}$$

La table occupe une simple page dont on a représenté un extrait ci-après :

[1] A. C. Johnson est également l'auteur d'ouvrages de trigonométrie plane et sphérique.
[2] S'agit-il de la 1re édition ? Ch. Cotter mentionne une 3e édition en 1895.

Hour Angle	Index Num	Bearing	Nr
h. m		° '	
...	...	...	...
1. 02	26.7	15.30	.28
04	27.6	16.00	.29
06	28.4	16.30	.30
08	29.2	17.00	.31
...	...	...	...
1.52	46.9	28.00	.53
54	47.7	28.30	.54
56	48.5	29.00	.55
...	...	...	...

L' « index number » est égal à 100.sin(hour angle) ou 100.sin(bearing), soit IN = 100.sinP ou 100.sinZ. Nr représente la tangente de l'argument P ou Z.

Pour calculer un azimut connaissant l'angle au pôle P, la hauteur H et la déclinaison D, il convient :

- de rechercher l'index number IN en fonction de P,
- à l'aide d'une table de point de déterminer le produit x = IN.cosD : on entre alors dans cette table avec la déclinaison D comme angle de route et avec IN dans la colonne « distance »,
- à l'aide de la table de point de déterminer le quotient y = x/cosH : on entre alors dans la table avec la hauteur H comme angle de route et x qui figurera dans la colonne « chemin NS » ; la valeur de y cherchée figure en regard dans la colonne distance parcourue,
- on obtient en définitive un nouvel index number y = 100.sinP.cosD/cosH = 100.sinZ dont on extrait l'azimut Z en regard.

<u>Exemple</u> : calculer, à l'aide de l'extrait de table ci-dessus, l'azimut Z du Soleil lorsque P = 1 h 08 m E, D = 20° N, H = 55°.

On a : IN = 29,2 (lecture directe), IN.cosD = 27,4 (table de point), y = 47,8 (table de point) ; avec cette valeur d'IN, on lit directement l'azimut Z = S28,5°E.

<u>Calcul des éléments d'une droite de hauteur</u> :

Les coordonnées du point estimé E étant (φ_e, G_e), il s'agit de calculer la latitude du point déterminatif relatif à l'observation d'un astre dont la hauteur vraie, issue de la mesure, est H_v, la longitude de ce point étant la longitude estimée ; pour l'instant de l'observation, un almanach permet de calculer l'angle horaire local estimé de l'astre $AHag_e$, dont on déduit l'angle au pôle P_e et sa déclinaison D ; la longitude du point déterminatif est la longitude estimée.

La formule utilisée par A. C. Johnson est la suivante :

$$\mathrm{vers(MZD)} = \mathrm{vers}(\mathrm{N_v}) - \cos\varphi . \cos \mathrm{D}. \mathrm{vers}(\mathrm{P_e})$$

expression dans laquelle MZD est la distance zénithale méridienne (φ – D) et N_v = 90° - H_v. Le second terme du membre de droite, cosφ.cosD.vers(P_e) est appelé « versine réduit ».

A. C. Johnson indique :

- de rechercher vers(P_e) à l'aide de la table figurant dans l'opuscule,
- de calculer cosD.vers(P_e) à l'aide de la table de point avec D comme angle de route et vers(P_e) comme distance ; on lira le résultat dans la colonne des chemins NS,
- de calculer une valeur approchée du versine réduit en prenant la latitude estimée φ_e et en utilisant à nouveau la table de point avec φ_e comme angle de route et cosD.vers(P_e) comme distance ; on lira de même le résultat dans la colonne des chemins NS.

On effectue ensuite la différence entre vers(N_v), relevé dans la table des versines naturels, et le versine réduit ; la table des versines permet enfin, en lecture inverse, de déterminer MZD en fonction de son versine. On déduit la latitude en formant $\varphi = MZD + D$.

On évalue ensuite l'azimut et on construit la droite de hauteur à partir du point déterminatif de coordonnées (φ, G_e).

La méthode, expéditive, est évidemment approchée : elle n'est exacte que si la latitude estimée est elle-même exacte. En différentiant la formule, on établit que, pour une erreur $\Delta\varphi$ sur la latitude, l'erreur sur MZD calculée (donc sur la latitude du point déterminatif) a pour expression :

$$\Delta MZD = \frac{\mathrm{vers}(P_e).\Delta\varphi}{1 - \tan D.\cot\varphi}$$

Cette erreur sera d'autant plus faible que :

- l'angle au pôle est faible (astre voisin du méridien),
- la différence algébrique entre latitude et déclinaison est importante.

Il convient donc d'éviter de traiter par cette méthode l'observation d'un astre qui va culminer à grande hauteur (> 70° par exemple) et dont l'angle au pôle est supérieur à une vingtaine de degrés.

Si la latitude trouvée est notablement différente de la latitude estimée, il conviendra d'effectuer un nouveau calcul du versine réduit en utilisant la valeur trouvée de latitude[3] (calcul par itération).

Exemple :

Calcul de la latitude du point déterminatif d'une droite de hauteur à partir des données résumées dans le tableau ci-après :

φ_e = 52° 00' N			G_e = 45° 30' W		
H_v =	51° 29'	D =	22° 14' N	P_e =	32° 13' E

Le détail des calculs figure ci-dessous :

vers(P_e) =	1540	vers(N_v) =	2176	MZD =	29° 31'
cosD.vers(P_e) =	1426	- versine réduit =	- 878	+ D =	22° 14'
versine réduit = cosφ_e.cosD.vers(P_e) =	878	vers(MZD) =	1298	**φ =**	**N 51° 45'**

Le versine réduit est calculé avec une table de point, ce qui nécessite ici une interpolation pour la déclinaison car les « angles de route » sont argumentés tous les degrés entiers.

On remarque que la latitude trouvée diffère de 15' de la latitude estimée. Compte tenu des données, l'erreur sur MZD calculée est d'environ 4' ; celle-ci se reporte intégralement sur la latitude cherchée. Des itérations successives, convergentes, conduisent à une latitude du point déterminatif de 51° 41' N. Le premier résultat trouvé est donc approximatif.

[3] A. C. Johnson emploie, sans la nommer, la méthode mise au point par J. Inman pour le calcul d'une latitude « ex-meridian » par itération ; voir fiche « Point de Midi », page 11.

Calcul des coordonnées du point astronomique résultant de deux mesures de hauteur :

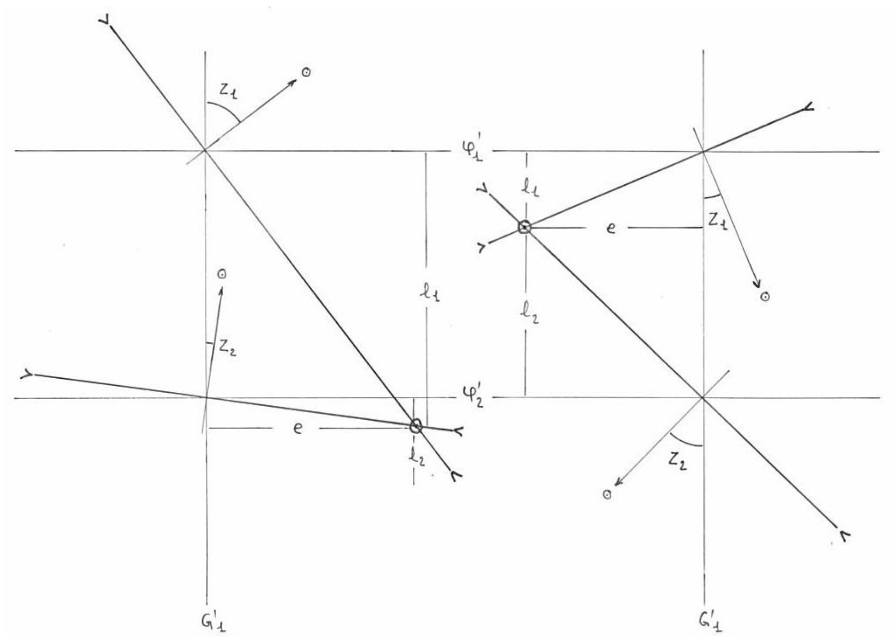
A un premier instant t_1, on effectue une mesure de hauteur d'un astre ; à ce moment, les coordonnées du point estimé sont (φ_e, G_e). Un premier calcul, effectué tel que ci-dessus, fournit :

- la latitude du point déterminatif φ_1 (sa longitude est G_e),
- l'azimut Z_1 de l'astre.

On recale l'estime sur le point déterminatif trouvé qui a pour coordonnées φ_1 et G_e. Le navire poursuivant sa route R à la vitesse V, on effectue à l'instant t_2 une seconde mesure de hauteur d'astre (il peut s'agir du même astre ou d'un autre astre) ; les opérations à effectuer sont les suivantes :

- détermination des coordonnées φ'_1 et G'_1 du point estimé à l'instant de la seconde observations, la distance parcourue entre les deux étant m = v.(t_2 – t_1) selon la route R[4] ; on a alors :
$$\varphi'_1 = \varphi_1 + \mathrm{m.}\cos \mathrm{R} \quad \text{et} \quad G'_1 = G_e + \frac{\mathrm{m.}\sin \mathrm{R}}{\cos \varphi_m}$$
ces coordonnées caractérisent « le point déterminatif transporté » par où passe la 1re droite de hauteur transportée pour l'heure de la seconde observation (cette détermination peut aussi s'effectuer graphiquement sur un canevas de Mercator) ; φ_m représente la latitude moyenne du parcours ;
- calcul de la latitude φ'_2 du point déterminatif relatif à la seconde observation, sa longitude étant G'_1,
- calcul de l'azimut Z_2 de l'astre,
- détermination des coordonnées φ et G du point à l'instant t_2 : ce point est situé à l'intersection de la première droite transportée et de la seconde ; ces coordonnées peuvent se déterminer graphiquement ou par le calcul comme explicité ci-après.

Les figures ci-dessous illustrent deux configurations possibles des lieux de position : à gauche, les deux observations sont faites dans le même quadrant (par exemple Soleil à deux instants successifs dans la matinée, culmination au Nord), à droite, les deux observations sont faites de part et d'autre du méridien (par exemple, une observation du Soleil en fin de matinée, la seconde en début d'après-midi, culmination au Sud).



[4] Les produits m.cosR et m.sinR s'effectuent avec la table de points et sont respectivement les chemins NS et EW.

On évalue d'abord le chemin en longitude, exprimé en minutes de latitude, e ; on a :

$$e = \frac{\varphi'_1 - \varphi'_2}{\tan Z_1 \pm \tan Z_2}$$

Les azimuts sont ici comptés par quadrants (donc de 0° à 90°) ; on fera la somme des tangentes si les observations ont été faites dans les quadrants adjacents NE et NW ainsi que SE et SW, la différence si les observations ont été faites dans un même quadrant ou des quadrants opposés (NE et SW ainsi que NW et SE). Le calcul s'effectue en valeur absolue et, à l'aide d'un schéma, on donne un nom à e : E ou W du méridien estimé de longitude G'_1. On calcule ensuite la différence de longitude[5] :

$$g = \frac{e}{\cos \varphi'_2}$$

On évalue ensuite les différences de latitude l_1 et l_2 du point par rapport aux parallèles de latitude φ'_1 et φ'_2. On a :

$$l_1 = e.\tan Z_1 \quad ; \quad l_2 = e.\tan Z_2$$

Ces différences de latitude sont de même nom si les observations sont faites dans un même quadrant ou dans deux quadrants opposés ; elles sont de noms contraires si les observations sont faites dans deux quadrants adjacents (NE et NW ainsi que SE et SW). La détermination se fait « … *in such a manner as to make the latitudes agree.* »[6]

On calcule enfin les coordonnées du point observé à t_2 :

$$\varphi = \varphi'_1 + l_1 = \varphi'_2 + l_2 \quad ; \quad G = G'_1 + g$$

S'agissant de calculs approchés, ces derniers sont conduits à la minute près.

Exemple :

Les données de calcul sont résumées dans le tableau ci-dessous ; entre les deux observations, le navire fait route au 320° à 10 nœuds.

φ_e = 30° 12' S			G_e = 1° 30' W		
1re observation à 10 h 50 m					
H_{v1} =	50° 06'	D_1 =	5° 05' N	P_1 =	19° 45' E
2e observation à 13 h 30 m					
H_{v2} =	50° 10'	D_2 =	5° 07' N	P_2 =	19° 55' W

Calcul de la première droite :

vers(P_1) =	588	vers(N_{v1}) =	2328	MZD =	35° 08'
cosD.vers(P_1) =	586	- versine réduit =	- 506	+ D =	- 5° 05'
versine réduit = cosφ_e.cosD.vers(P_1) =	506	vers(MZD) =	1822	**φ_1 =**	**S 30° 03'**

[5] On devrait ici utiliser la latitude moyenne φ_m entre la plus grande et la plus petite des latitudes φ'_1, φ'_2 et φ ; compte tenu de la précision visée (la minute), l'approximation $\varphi_m = \varphi'_2$ est admissible.

[6] A. C. Johnson précise une règle, qui sera examinée, lors de l'étude de son ouvrage « On Finding the Latitude and Longitude in Cloudy Weather ». Il est ici plus commode de faire un graphique à vue permettant de fixer rapidement et sans ambiguïté les noms des variations de latitude et longitude.

Le calcul d'azimut donne : Z_1 = N32°E (arrondi au degré entier le plus proche).

Le point déterminatif a donc pour coordonnées : φ_1 = 30° 03' S, G_e = 1° 30' W.

Il s'est écoulé 2 h 40 m entre les deux observations pendant lesquelles le navire a parcouru m = 26,7 milles au 320° (N40°W) ; les coordonnées du point déterminatif transporté à l'heure de la 2[e] observation sont donc :

φ_1 =	30° 03' S	G_e =	1° 30' W
m.cosR =	20'N	m.sinR/cosφ_m =	20' W
φ'_1 =	29° 43' S	G'_1 =	01° 50' W

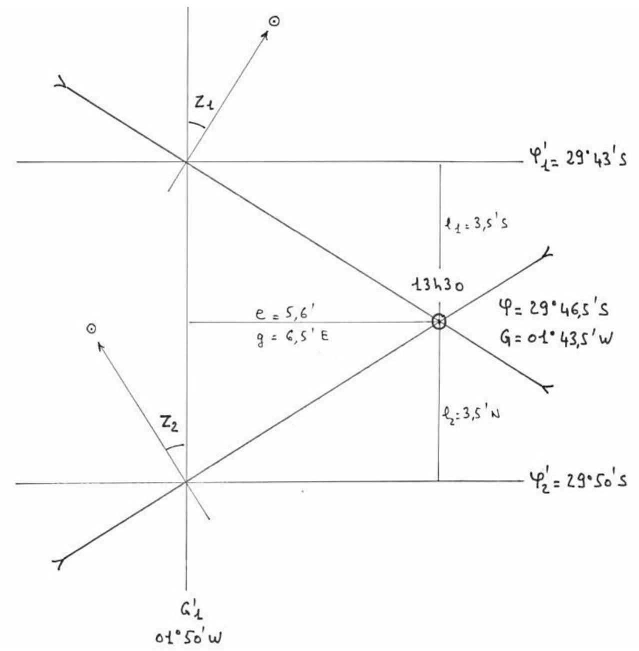
Calcul de la seconde droite :

vers(P_2) =	598	vers(N_{v2}) =	2321	MZD =	34° 57'
cosD.vers(P_2) =	596	- versine réduit =	- 517	+ D =	- 5° 07'
versine réduit = cosφ_e.cosD.vers(P_2) =	517	vers(MZD) =	1804	**φ'_2 =**	**S 29° 50'**

Le calcul d'azimut donne : Z_2 = N32°W (arrondi au degré entier le plus proche).

Le tableau ci-dessous, conforme au type de calcul donné par Johnson, résume le calcul des coordonnées du point :

Z	tanZ	Lat. 1	Long.	Lat. 2	Lat. 3
N32°E N32°W	0,62 0,62	29° 43' S 29° 50' S	01° 50' W 6,5' E	29° 43' S 3,5' S	29° 50' S 3,5' N
	1,24	7' S	01° 43,5' W	29° 46,5' S	29° 46,5' S



Dans le tableau ci-dessus, la colonne « tanZ » donne la somme $tanZ_1 + tanZ_2$ (astre dans deux quadrants adjacents). La colonne « Lat. 1 » donne la différence de latitude $\varphi'_1 - \varphi'_2 = 7'$ d'où on déduit e = 7/1,24 = 5,6' E ; la différence de longitude est ensuite g = 5,6/cos29,8° = 6,5' E ; cette quantité est reportée en colonne « Long. » pour déterminer la longitude du point. Les deux dernières colonnes permettent le calcul de la latitude du point par la relation l = e.tanZ ainsi qu'une vérification (on doit évidemment trouver la même latitude finale).

Nota : la faible valeur des angles au pôle considérés et une culmination relativement éloignée du zénith permettent de s'affranchir des itérations dans le calcul des latitudes par le versine réduit.

Autres calculs possibles :

Les tables contenues dans l'opuscule de Johnson permettent de résoudre les problèmes dont la solution résulte de la formule :

$$\mathrm{vers}(\varphi - D) = \mathrm{vers}(N) - \cos\varphi . \cos D . \mathrm{vers}(P)$$

A. C. Johnson retient notamment :

- le calcul de l'heure (ou de la longitude) connaissant la latitude, la déclinaison de l'astre et sa hauteur (ou sa distance zénithale) ; la formule est alors :
$$\mathrm{vers}(P) = [\mathrm{vers}(N) - \mathrm{vers}(\varphi - D)] . \sec\varphi . \sec D$$
elle se résout commodément en utilisant un calcul logarithmique ce qui conduit à adjoindre au document deux tables supplémentaires, l'une donnant les logarithmes des nombres, l'autre les logarithmes des versines d'un arc ;
- le calcul de la hauteur à partir de :
$$\mathrm{vers}(N) = \mathrm{vers}(\varphi - D) + \cos\varphi . \cos D . \mathrm{vers}(P)$$
une valeur approchée de la distance zénithale peut se calculer à partir de la table figurant dans l'opuscule à laquelle on adjoint une table de point.

Ce dernier calcul est présenté par Johnson en vue du traitement d'une distance lunaire ; il peut néanmoins être utilisé pour déterminer une hauteur estimée (ou auxiliaire) et ainsi traiter une observation par la méthode Marcq de Saint-Hilaire. C'est ce qui sera proposée en 1913 par William Hall dans « Appendix to Raper's Practice of Navigation », avec des tables à 4 décimales, puis reprise en France dans les années 1930 par J.-B. Dieumegard.

2. *Short Tables and Rules for Finding Latitude & Longitude*

L'ouvrage comporte une quarantaine de pages au format de 16 cm sur 25 cm ; l'édition consultée est la seconde, publiée en 1900. Le document s'inspire largement du précédent « Brief and Simple Methods of Finding Latitude & Longitude » dont il constitue une version très nettement améliorée puisqu'il ne sera pas nécessaire de faire appel à des tables supplémentaires pour résoudre les différents problèmes proposés.

L'opuscule comporte tout d'abord 30 pages d'instructions d'emploi dans lesquelles sont développées, appuyées par de nombreux exemples, les procédures de résolution de neuf problèmes type :

1) trouver la latitude par une hauteur du Soleil au voisinage du méridien ;
2) trouver la latitude et la longitude par deux hauteurs du Soleil au voisinage du méridien ;
3) trouver la latitude par une hauteur d'étoile au voisinage du méridien inférieur ;
4) trouver l'angle horaire par une seule hauteur du Soleil ;

5) trouver la longitude par une hauteur prise au voisinage du méridien et la hauteur méridienne ;
6) trouver la latitude et la longitude par deux hauteurs avec un grand azimut ou « double chronometer altitude » ;
7) longitude par les distances lunaires ;
8) trouver la latitude par l'étoile Polaire ;
9) trouver l'azimut d'un astre.

Les tables occupent les huit dernières pages du document :

Tables a à i disposées sur une seule page :

a) réfraction astronomique,
b) dépression apparente de l'horizon,
c) parallaxe en hauteur du Soleil,
d) correction globale des hauteurs observées du Soleil,
e) correction des distances lunaires (demi-diamètre),
f) correction des distances lunaires (2e correction),
g) tangente et cotangente d'un angle (azimut),
h) $g = e.\sec\varphi$,
i) latitude par La Polaire.

Table I, donnant $\log\theta = \log\sec\varphi + \log\sec D$ en fonction de la latitude (de 0° à 60°) et de la déclinaison (de 4° à 23,5°) ; le résultat est donné avec 3 décimales, les intervalles d'argumentation sont de 1° pour la latitude et de 0,5° pour la déclinaison.

Table II, donnant $4 + \log\text{vers}(P)$ en fonction de l'angle au pôle (de 0 h à 6h), avec un intervalle d'argumentation de 20 s ; interpolation par la donnée des différences tabulaires ; les résultats sont donnés avec 4 décimales.

Table III, donnant le logarithme du cosinus multiplié par 10 d'un angle compris entre 0° et 60° avec 4 décimales ; même présentation et argumentation que la table II.

Table IV, donnant le logarithme d'un nombre compris entre 10 et 100 avec 4 décimales.

Table V, donnant le logarithme de la sécante d'un angle compris entre 0° et 71° ; même présentation et argumentation que la table II.

Table VI, donnant les versines naturels multipliés par 10^4 d'un angle compris entre 0° et 90° (ou 0 h et 6 h) ; la table donne 4 chiffres significatifs, présentation et argumentation identique à la table II.

Table VII, permettant le calcul de l'azimut par l'heure et la hauteur par logarithmes à 3 décimales.

Tous les problèmes mentionnés, à l'exception des n° 8 et 9, se résolvent en tout ou partie à l'aide de la formule de base :

$$\text{vers}(\varphi - D) = \text{vers}(N) - \cos\varphi.\cos D.\text{vers}(P)$$

dont on trouve les éléments de résolution dans les tables I à VI.

Les principes de résolution proposés pour les problèmes 1), 2) et 5) sont identiques à ceux exposés dans le précédent ouvrage « Brief and Simple Methods of Finding the Latitude & Longitude » ; les problèmes 8) et 9) n'appellent pas de développements particuliers. Le problème du calcul des distances lunaires 7) a été exposé par A. C. Johnson simultanément à titre de sécurité et, reconnaissant la sûreté de fonctionnement des chronomètres, comme un objet de satisfaction intellectuelle. Ce problème, spécifique, sort du champ de la présente étude. Il reste :

- le problème 3) qui, bien que peu utilisé en pratique mérite quelques éclaircissements ;
- les problèmes 4) et 6) qui utilisent la formule de base avec l'angle au pôle P en inconnue ; l'analyse sera conduite à partir du problème 6), le plus complexe.

Calcul de latitude par une hauteur d'étoile prise au voisinage du méridien inférieur :

Il s'agit ici de calculer les éléments d'une droite de hauteur résultant de l'observation d'une étoile proche du méridien inférieur du lieu par la méthode du méridien estimé.

L'étoile observée est nécessairement circumpolaire visible ; la latitude φ et la déclinaison D sont donc de même nom avec $D > 90° - \varphi$. On a d'autre part, au moment du passage au méridien inférieur :

$$\varphi = 180° - (D + MZD_i)$$

MZD_i étant la distance zénithale au moment du passage au méridien inférieur.

Lorsque, en un lieu donné, l'étoile est proche du méridien inférieur, son angle au pôle est voisin de 12 h (ou 180°) ; l'argumentation des tables, notamment celles de Johnson, donnant le versine de P ou le log versine de P étant limitée à 90° ou 6 h, il est nécessaire d'utiliser le supplément de l'angle au pôle, P' = 180° - P. Dans ces conditions, on vérifie que vers(P) = 2 – vers(P'). La relation de base s'écrit alors :

$$\text{vers}(\varphi - D) = \text{vers}(N) - 2.\cos\varphi.\cos D + \cos\varphi.\cos D.\text{vers}(P')$$

qui, après transformation donne :

$$\text{vers}(MZD_i) = \text{vers}(N) + \cos\varphi.\cos D\,.\text{vers}(P')$$

Comme pour un calcul de latitude au voisinage du méridien supérieur, on détermine ici une valeur approchée du « versine réduit » $\cos\varphi_e.\cos D.\text{vers}(P'_e)$ en utilisant les coordonnées du point estimé ; on additionne cette quantité au versine de la distance zénithale vraie issue de la mesure. MZD_i donne ensuite accès à la latitude du point déterminatif. Pour construire la droite de hauteur correspondante, il faut également calculer l'azimut de l'astre.

Exemple :

Calcul de la latitude du point déterminatif d'une droite de hauteur à partir des données résumées dans le tableau ci-après :

φ_e = 49° 13' N			G_e = 45° 30' W		
H_v =	5° 21'	D =	45° 52' N	P_e =	173° 07' E

Le supplément de l'angle au pôle estimé est P'e = 6°53' ; la distance zénithale est N_v = 84° 39'.

Le calcul de latitude est alors le suivant :

logvers(P'$_e$) =	1,8578		vers réduit =	33
logcosφ_e =	0,8150		vers(N_v) =	9068
logcosD =	0,8428		vers(MZD_i) =	9101
log(vers réduit) =	1,5156		MZD_i =	84° 51'
			D =	45° 52'
			MZD_i + D =	130° 43'
				180° 00'
			φ =	**N 49° 17'**

L'azimut calculé est Z = N5°E ; la droite de hauteur est donc à tracer à partir du point de latitude 49° 17' N, et de longitude G_e = 45° 30' W, selon l'azimut calculé.

Double chronometer altitude :

Dans cette méthode, la position du navire est obtenue par deux observations d'astre(s) traitées selon la méthode du parallèle estimé (Lalande) ; on effectue donc deux calculs d'heures (ou d'angles horaires) successifs d'où le nom donné au procédé par les britanniques. Cette appellation est contestée par certains, dont H. Raper, qui lui aurait préféré l'appellation « combined altitudes ».

A un premier instant t_1, on effectue une mesure de hauteur d'un astre : soit H_{v1} la hauteur vraie correspondante et N_{v1} la distance zénithale ; pour cet instant, un almanach donne l'angle horaire de l'astre au méridien origine $AHap_1$ et sa déclinaison D_1 ; on relève les coordonnées du point estimé qui sont (φ_e, G_e). Avec ces différentes données, la formule de base permet le calcul de l'angle au pôle :

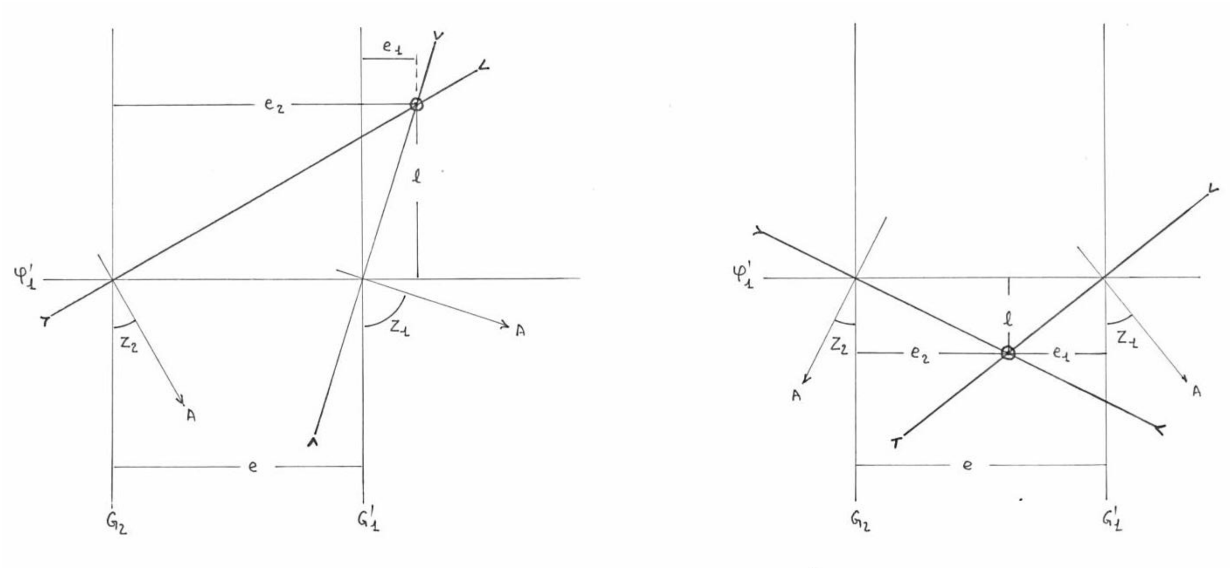
$$\mathrm{vers}(P_1) = \frac{\mathrm{vers}(N_{v1}) - \mathrm{vers}(\varphi_e - D_1)}{\cos\varphi_e . \cos D_1}$$

d'où l'on déduit la longitude du point déterminatif de latitude φ_e : $G_1 = AHap_1 - AHag_1$ avec $AHag_1 = P_1$ si l'astre est à l'W ou $AHag_1 = 360° - P_1$ si l'astre est à l'E. On calcule également l'azimut Z_1 de l'astre.

On recale l'estime sur le point déterminatif trouvé qui a pour coordonnées φ_e et G_1. Le navire poursuivant sa route R à la vitesse V, on effectue à l'instant t_2 une seconde mesure de hauteur d'astre, H_{v2}, (il peut s'agir du même astre ou d'un autre astre) ; les opérations à effectuer sont les suivantes :

- détermination des coordonnées φ'_1 et G'_1 du point estimé à l'instant de la seconde observation, la distance parcourue entre les deux étant m = v.($t_2 - t_1$) selon la route R ; on a alors :
$$\varphi'_1 = \varphi_1 + m.\cos R \quad \text{et} \quad G'_1 = G_e + \frac{m.\sin R}{\cos\varphi_m}$$
ces coordonnées caractérisent « le point déterminatif transporté » par où passe la 1re droite de hauteur transportée pour l'heure de la seconde observation (cette détermination peut aussi s'effectuer graphiquement sur un canevas de Mercator) ; φ_m représente la latitude moyenne du parcours ;
- calcul, à l'aide de l'almanach et par la formule de base, de la longitude G_2 du point déterminatif relatif à la seconde observation, sa latitude étant φ'_1,
- calcul de l'azimut Z_2 de l'astre,
- détermination des coordonnées φ et G du point à l'instant t_2 : ce point est situé à l'intersection de la première droite transportée et de la seconde ; ces coordonnées peuvent se déterminer graphiquement ou par le calcul comme explicité ci-après.

Les figures ci-dessous illustrent deux configurations possibles des lieux de position : à gauche, les deux observations sont faites dans le même quadrant, à droite, les deux observations sont faites de part et d'autre du méridien.



On évalue d'abord les chemins en longitude ; on a :

$$e_1 = \frac{e.\tan Z_2}{\tan Z_1 \pm \tan Z_2} \quad \text{et} \quad e_2 = \frac{e.\tan Z_1}{\tan Z_1 \pm \tan Z_2}$$

Les différences de longitude sont donc :

$$g_1 = \frac{(G_2 - G'_1).\tan Z_2}{\tan Z_1 \pm \tan Z_2} \quad \text{et} \quad g_2 = \frac{(G_2 - G'_1).\tan Z_1}{\tan Z_1 \pm \tan Z_2}$$

Les azimuts sont ici comptés par quadrants (donc de 0° à 90°) ; on fera la somme des tangentes si les observations ont été faites dans les quadrants adjacents NE et NW ainsi que SE et SW, la différence si les observations ont été faites dans un même quadrant ou des quadrants opposés (NE et SW ainsi que NW et SE). Le calcul s'effectue avec des valeurs absolues, les noms des différences de longitude se déterminant facilement à l'aide d'un schéma. On calcule ensuite la différence de latitude dont le nom est fixé par le même schéma :

$$l = g_1.\cos\varphi'_1.\tan Z_1 \quad \text{ou} \quad l = g_2.\cos\varphi'_1.\tan Z_2$$

On calcule enfin les coordonnées du point observé à t_2 :

$$\varphi = \varphi'_1 + l \quad ; \quad G = G'_1 + g_1 = G_2 + g_2$$

<u>Exemple</u> :

Les données de calcul sont résumées dans le tableau ci-dessous ; entre les deux observations, le navire fait route au S74°W et a parcouru 25,5 milles.

φ_e = 40° 23,5' N			G_e = 69° 41' W		
1re observation à 08 h 38 m					
H_{v1} =	13° 10'	D_1 =	20° 47,8' S	$AHvp_1$ =	19° 52,3'
2e observation à 10 h 38 m					
H_{v2} =	25° 58,5'	D_2 =	20° 46,5' S	$AHvp_2$ =	49° 50,8'

Calcul de la première droite :

φ_e =	N 40° 23,5'	$\log\sec\varphi_e$ =		0,1183
D_1 =	S 20° 47,8'	$\log\sec D_1$ =		0,0293
$\varphi_e - D_1$ =	61° 11,3'	$\mathrm{vers}(\varphi_e - D_1)$ =	0,5181	
N_{v1} =	76° 50,0'	$\mathrm{vers}(N_{v1})$ =	0,7722	
		Δvers =	0,2541	$\log\Delta$vers = 3,4050
P_1 =	E 49° 58,8'	$\log\mathrm{vers}(P_1)$ =		3,5526
$AHvg_1$ =	310° 01,2'			
$AHvp_1$ =	19° 52,3'			
G_1 =	**W 69° 51,1'**			

Le calcul d'azimut donne : Z_1 = S47°E (arrondi au degré entier le plus proche).

Le point déterminatif a donc pour coordonnées : φ_e = 40° 23,5' N, G_1 = 69° 51,1' W.

Le navire a parcouru m = 25,5 milles au S74°W, les coordonnées du point déterminatif transporté à l'heure de la 2e observation sont :

φ_e =	40° 23,5' N	G_1 =	69° 51,1' W
$m.\cos R$ =	7,0' S	$m.\sin R/\cos\varphi_m$ =	32,1' W
φ'_1 =	40° 16,5' N	G'_1 =	70° 23,2' W

Calcul de la seconde droite :

φ'_1 =	N 40° 16,5'	$\mathrm{Log}\sec\varphi'_1$ =		0,1175
D_2 =	S 20° 46,5'	$\log\sec D_2$ =		0,0292
$\varphi_e - D_2$ =	62° 03,0'	$\mathrm{vers}(\varphi_e - D_2)$ =	0,5160	
N_{v2} =	64° 01,5'	$\mathrm{vers}(N_{v2})$ =	0,5620	
		Δvers =	0,0460	$\log\Delta$vers = 2,6630
P_2 =	E 20° 41,7'	$\log\mathrm{vers}(P_2)$ =		2,8097
$AHvg_2$ =	339° 18,3'			
$AHvp_2$ =	49° 50,8'			
G_2 =	**W 70° 32,5'**			

Le calcul d'azimut donne : Z_2 = S22°E (arrondi au degré entier le plus proche).

Calcul des coordonnées du point :

G_2 =	70° 32,5' W	$\tan Z_1$ =	1,072	g_2 =	14,9' E
G'_1 =	70° 23,2' W	$\tan Z_2$ =	0,404	g_1 =	5,6' E
g =	9,3' W	$\tan Z_1 - \tan Z_2$ =	0,668		

G_2 =	70° 32,5' W	G'_1 =	70° 23,2' W	φ'_1 =	40° 16,5' N
g_2 =	14,9' E	g_1 =	5,6' E	l =	4,6' N
G =	70° 17,6' W	G =	70° 17,6' W	φ =	40° 21,1' N

On adoptera comme point à 10 h 38 m : **φ = 40° 21' N** **G = 70° 18' W**.

La configuration des éléments géométriques du point est celle figurant en page 15, partie gauche.

3. *How to Find the Time at Sea in less than a Minute*

L'ouvrage comporte un peu moins de 30 pages au format de 16 cm sur 25 cm ; l'édition consultée est la cinquième, publiée en 1907. Comme son titre l'indique, le document est quasiment exclusivement consacré au calcul de l'angle horaire, donc de la longitude. Il comporte 16 pages d'instructions d'emploi et d'exemples suivis de 10 pages de tables qui se décomposent comme suit :

- Table A donnant les versines naturels d'arcs compris entre 0° et 90° ;
- Table B donnant la mantisse des logarithmes de la sécante d'un arc compris entre 0° et 60° ;
- Table C donnant la mantisse des logarithmes du versine, multiplié par 10, d'un arc compris entre 0 h et 7 h ;
- Table D, à double entrée, donnant $\log 10.[\mathrm{vers(N)} - \mathrm{vers}(\varphi - \mathrm{D})] = \log 10.[\cos \mathrm{MZD} - \sin \mathrm{H}]$ en fonction de la hauteur H comprise entre 5° et 64° et de la distance zénithale méridienne MZD = φ – D, comprise entre 0° et 80° ;
- Table E, à double entrée donnant la quantité $p = \cot Z . \sec \varphi$ (coefficient Pagel), en fonction de l'azimut Z compris entre 10° et 90° et de la latitude φ comprise entre 0° et 60°.

Les tables A, B et C sont argumentées toutes les minutes d'arc (ou toutes les 4 s) et comportent 4 chiffres significatifs (ou 4 décimales) ; l'intervalle d'argumentation de la table D est de 1° et celui de la table E de 2° ; les résultats fournis par la table D comportent 4 chiffres significatifs, ceux de la table E sont exprimés au 1/100e de minute près.

L'ouvrage vise essentiellement à simplifier le calcul d'angle horaire, fondé sur la formule :

$$\mathrm{vers(P)} = [\mathrm{vers}(\mathrm{N_v}) - \mathrm{vers(MZD)}].\sec \varphi .\sec \mathrm{D}$$

en utilisant une latitude auxiliaire φ_a, aussi proche que possible de la latitude estimée et telle que $MZD_a = \varphi_a - D$ soit un nombre entier de degrés tout comme la hauteur vraie. Dans ces conditions, le logarithme de la différence de versines est obtenu par simple lecture directe dans la table D ; l'angle au pôle cherché est ainsi issu d'une addition de 3 logarithmes obtenus directement dans les tables B et D, sans interpolations si φ_a et D sont arrondis à la minute.

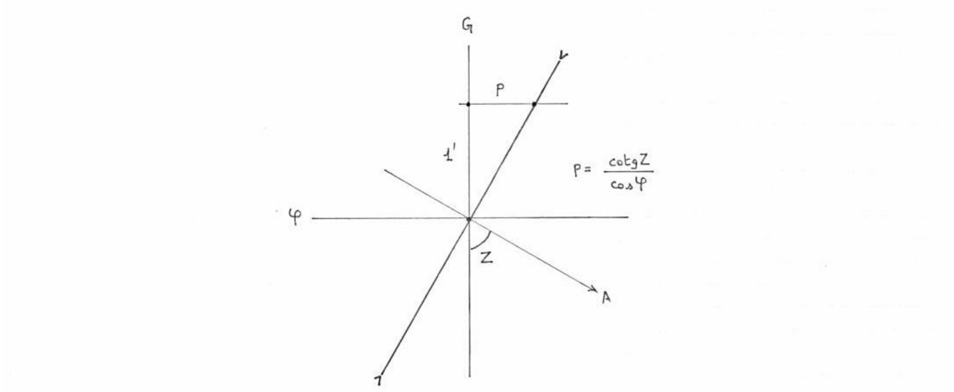
La hauteur vraie entière, égale à un nombre entier de degrés, est obtenue en préréglant le sextant à une hauteur instrumentale correspondante. Par exemple, pour obtenir une hauteur vraie du centre du Soleil de 30° 00' au mois de février, pour un observateur situé à 10 m au-dessus du niveau de la mer utilisant un sextant dont l'erreur instrumentale est ε = +1,0', il faudra viser le bord inférieur du Soleil en ayant calé le sextant à :

$$H_i = H_v - \varepsilon - C_1 - C_2 = 30°\,00' - 1{,}0' - 8{,}8' - 0{,}2' = 29°\,50'$$

S'il est impossible d'obtenir une hauteur vraie entière, il faudra d'interpoler dans la table D pour les minutes de la hauteur.

Le document ne fournit pas d'éléments de calcul direct de l'azimut[7] qu'il conviendra de calculer avec une table annexe.

Le coefficient Pagel[8], $p = \cot Z . \sec \varphi$, fourni par la table E représente la variation de longitude de l'observateur, situé sur la droite de hauteur orientée selon l'azimut Z, correspondant à une variation de latitude de 1'.



La connaissance de ce coefficient permet de calculer facilement les coordonnées de n'importe quel point de la droite de hauteur proche du point déterminatif ; il facilite ainsi le calcul des coordonnées du point dès qu'un deuxième lieu de position est obtenu ; le calcul est particulièrement simple si ce second lieu correspond à l'observation méridienne[9].

Exemple : calcul d'un point à midi.

Les données de calcul sont résumées dans le tableau ci-dessous ; entre les deux observations, le navire a fait route au N22°W et a parcouru 30,0 milles.

φ_e = 40° 35' N			G_e = 27° 50' W		
1re observation à 08 h 30 m					
H_{v1} =	30° 00'	D_1 =	3° 30,0' N	$AHvp_1$ =	335° 05,0'
Observation méridienne à 12 h 00 m					
H_{v2} =	52° 41,5'	D_2 =	3° 33,5' N		

Calcul de la première droite :

La latitude auxiliaire choisie est φ_a = 40° 30' N, donnant une distance zénithale méridienne auxiliaire MZD_a entière. Le détail du calcul figure dans le tableau ci-après :

7 A. C. Johnson indique cependant une méthode de calcul de l'azimut par la hauteur avec les tables contenues dans l'opuscule.
8 Louis Pagel, Officier de Marine qui, le premier, mis en évidence ce coefficient et son utilité dans le calcul du point. Voir le mémoire dont il est l'auteur paru dans les « Annales Maritimes et Coloniales », partie non officielle, sciences et arts, 1847 : la latitude hors du méridien, méthode facile et courte pour déterminer la position de l'observateur par les hauteurs.
9 Voir fiche « Point à Midi », page 2.

$\varphi_a =$	40° 30’		$\log\sec\varphi_a =$	1190
$D =$	3° 30’		$\log\sec D =$	8
$MZD_a =$	37°		$\log(\text{vers}N_{v1} - \text{vers}MZD_a) =$	4751
$H_{v1} =$	30°			
$P_1 =$	E 52° 39,6’		$\log\text{vers}P_1 =$	5949
$AHvg_1 =$	307° 20,4’			
$AHvp_1 =$	335° 05,0’			
$G_1 =$	**W 27° 44,6’**		**$Z_1 =$**	**S66°E**

Le point déterminatif a donc pour coordonnées : $\varphi_a = 40° 30,0'$ N, $G_1 = 27° 44,6'$ W.

Le navire a parcouru m = 30,0 milles au N22°W, les coordonnées du point déterminatif transporté à l’heure de la méridienne sont :

$\varphi_a =$	40° 30,0’ N	$G_1 =$	27° 44,6’ W
$m.\cos R =$	27,8’ N	$m.\sin R/\cos\varphi_m =$	14,8’ W
$\varphi'_1 =$	40° 57,8’ N	$G'_1 =$	27° 59,4’ W

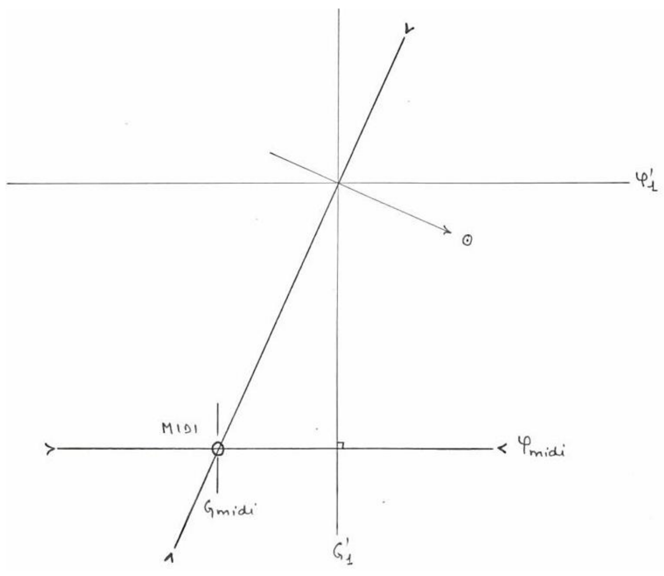
Calcul du point à midi :

Latitude méridienne		Différence de latitude		Longitude méridienne	
$N_{v2} =$	37° 18,5’	$\varphi_{midi} =$	N 40° 52,0’	$G'_1 =$	W 27° 59,4’
$D_2 =$	N 3° 33,5’	$\varphi'_1 =$	N 40° 57,8’	p.l =	W 3,4’
$\varphi_{midi} =$	N 40° 52,0’	l =	S 5,8’	$G_{midi} =$	W 28° 02,8’
p =	0,59’				

Le coefficient Pagel est évalué dans la table E pour une latitude de 41° et un azimut de 66°. Un simple schéma à vue permet de trouver le nom de la différence de longitude p.l.

On retiendra comme coordonnées du point à midi : **$\varphi_{midi} = 40° 52'$ N , $G_{midi} = 28° 03'$ W.**

Graphique du point :



4. On Finding the Latitude & Longitude in Cloudy Weather

Il semblerait que cet ouvrage d'A. C. Johnson ait été publié pour la première fois autour de 1880. Le petit livre (une soixantaine de pages) a rapidement connu un grand succès et fut réédité de nombreuses fois en Grande Bretagne : on relève une 27e édition en 1904, une 32e en 1909 et une 36e (et dernière ?) en 1918. Le succès de l'ouvrage s'est étendu bien au-delà des îles britanniques : l'ouvrage fut traduit en allemand, espagnol, italien et français ; selon son auteur, il est connu aux Etats-Unis et au Japon et il en existe une version turque. En France, la 27e édition de l'ouvrage a été traduite par le Lieutenant de Vaisseau Octave de Jassaud et éditée à la Librairie Coloniale (Augustin Challamel) en 1904. L'intérêt, et le succès, du petit livre d'A. C. Johnson réside dans les améliorations qu'il apporte à la méthode mise au point par le Lieutenant de Vaisseau Louis Pagel en 1847 pour calculer le point par deux observations.

Outre l'exécution de divers calculs courants, l'ouvrage permet essentiellement :

- suite à une mesure de hauteur d'un astre, de calculer un angle horaire donnant accès à une longitude et, ainsi, de déterminer les éléments d'une droite de hauteur par la méthode du parallèle estimé (Lalande),
- de calculer les coordonnées du point observé résultant de deux observations horaires d'astre(s) en utilisant le coefficient Pagel selon le procédé appelé en Grande Bretagne « double chronometer method »,
- de calculer l'azimut d'un astre par l'heure ou par la hauteur,
- de traiter les observations circumméridiennes.

L'opuscule est toujours du même format (16 sur 25 cm) et comporte, pour ce qui concerne sa 35e édition de 1916 qui a été analysée en détail, environ 40 pages d'explications, instructions et exemples et une vingtaine de pages de tables.

<u>Table I</u> :

Cette table, développée sur deux pages, permet de déterminer le coefficient Pagel p en fonction de la latitude φ, la déclinaison D et l'angle au pôle P. L'expression du coefficient, obtenu à partir de la formule des cotangentes, étant :

$$p = \tan D . \csc P - \cot P . \tan \varphi = \cot Z . \sec \varphi$$

Une double argumentation de l'angle au pôle, et une argumentation commune de la latitude et de la déclinaison, permet d'utiliser un même tableau pour évaluer, de façon approchée, les deux termes.

L'argumentation de l'angle au pôle est limitée à l'intervalle allant de 1 h (15°) à 6 h (90°) ; celui de la latitude et de la déclinaison va de 0° à 58°.

Une colonne supplémentaire de la table donne les valeurs de la cotangente de l'argument, une ligne supplémentaire donne les valeurs de la tangente de l'argument.

L'ensemble des valeurs calculées est exprimé avec deux décimales.

<u>Table II</u> :

Cette table, également développée sur 2 pages, exprime la relation entre l'azimut Z, en entrée ligne, et la latitude φ, en entrée colonne, donnant le coefficient Pagel figurant ici en intersection lignes/colonnes :

$$p = \cot Z . \sec \varphi$$

La table permet, connaissant la latitude, de calculer l'azimut de l'astre après détermination de p ; elle permet aussi de déterminer p, l'azimut ayant été calculé à part.

Elle est argumentée de 0° à 60° en latitude[10] et de 10° à 90° en azimut ; p est exprimé avec deux décimales.

La table donne également :

- en première colonne, la cotangente de l'argument,
- en dernière colonne de la 1re page, la cosécante de l'argument,
- en première ligne la sécante de l'argument,
- en dernière ligne la tangente de l'argument,
- en dernière colonne de la 2e page, le cosinus de l'argument.

En 2e page, à l'aide d'une double argumentation de l'azimut (bearing for altitude error), la table permet également de calculer le coefficient secφ.cscZ nécessaire au calcul de l'erreur en longitude résultant d'une erreur sur la hauteur.

<u>Table IIA</u> :

C'est une table de multiplication pour faciliter le calcul du produit du coefficient Pagel p par une différence de latitude l ; p est exprimé de 0,05 à 2,40 avec un intervalle de 0,05 ; la différence de latitude est exprimée en minutes entières jusqu'à 31'. La table peut également réaliser les opérations entre vitesses, intervalles de temps et distances parcourues ; cette table est développée sur deux pages.

<u>Table III</u> :

Table de calcul de la réduction à appliquer aux observations circumméridiennes. Cette table est analysée dans la fiche relative à ce type d'observation à la page 33.

<u>Table IV</u> :

Table donnant les logarithmes de la sécante de l'argument compris entre 0° et 90° avec un intervalle d'argumentation de 1' ; le résultat est exprimé avec 4 décimales ; la table est développée sur une simple page.

<u>Table V</u> :

Table donnant, sur deux pages, la quantité $5 + 0{,}5.\log \mathrm{hav}(x)$, l'argument x étant compris entre 0° et 180° avec un intervalle d'argumentation de 1' ; le résultat est exprimé avec 4 décimales ; la table est développée sur deux pages. Cette table est utile pour calculer l'angle au pôle selon la formule de Inman :

$$\mathrm{hav}(P) = \sec\varphi.\sec D.\sqrt{\mathrm{hav}[N-(\varphi-D)]}.\sqrt{\mathrm{hav}[N+(\varphi-D)]}$$

<u>Table VI</u> :

Table donnant sur une simple page la quantité $10 + \log \mathrm{hav}(P)$, l'angle au pôle P étant compris entre 0 et 8 h avec un intervalle d'argumentation de 5 s ; le résultat est exprimé avec 4 décimales.

Cette table est utilisée conjointement avec la table IV pour effectuer le calcul d'angle au pôle, ou de longitude, avec la formule de Borda mise sous la forme logarithmique suivante :

$$\mathrm{hav}(P) = \frac{\sec\varphi.\sec D}{\sec s.\sec[90° - (s-H)]}$$

$$10 + \log \mathrm{hav}(P) = \{\log\sec\varphi + \log\sec D\} - \{\log\sec s + \log\sec[90° - (s-H]\} + 10$$

(s est la demi-somme $½(\varphi + \delta + H)$).

[10] Dans l'édition consultée (35e, 1916), une petite table supplémentaire permet d'étendre l'intervalle d'utilisation des tables I et II jusqu'à 80° en latitude et en déclinaison.

Table VII :

Table donnant la quantité $5 + \log \cos x$, l'argument x étant compris entre 0° et 90° avec un intervalle d'argumentation de 1' ; le résultat est exprimé avec 4 décimales ; cette table est développée sur une page.

Les tables VIII, IX et X, figurant sur une même page sont respectivement : une table de point simplifiée, une table de correction des hauteurs (Soleil et étoiles) et une table de conversion des heures-minutes-secondes en degrés-minutes-secondes et réciproquement.

Table XI :

Table d'interpolation de l'équation du temps et de la déclinaison.

On trouve enfin, dans le corps du texte, une table permettant le calcul de l'azimut par la hauteur et une table servant à la recherche et à l'identification de 49 étoiles.

Calcul de longitude, exemple :

A titre de comparaison avec les autres ouvrages de Johnson, où la formule en versine est systématiquement utilisé, il est apparu intéressant de développer ici un calcul de longitude effectué avec les tables IV et VI.

Les données de calcul sont les suivantes (1re partie de l'exemple de la page 17) :

φ_e = 40° 23,5' N			G_e = 69° 41' W		
1re observation à 08 h 38 m					
H_{v1} =	13° 10'	D_1 =	20° 47,8' S	$AHvp_1$ =	19° 52,3'

Le calcul est alors le suivant :

φ_e =	40° 23,5'	logsecφ_e =	0,1183
δ_1 =	110° 47,8'	logsecD_1 =	0,0293
H_{v1} =	13° 10,0'	logA =	0,1476
2s =	164° 21,3'		
s=	82° 10,7'	logsecs =	0,8662
90° - (s – H) =	20° 59,3'	logsec(90° - (s – H)) =	0,0298
		logB =	0,8960
P_1 =	E 49° 58,9'	10 + loghavP_1 =	9,2516
$AHvg_1$ =	310° 01,1'		
$AHvp_1$ =	19° 52,3'		
G_1 =	W 69° 51,2'		

Ce que l'on écrira, à la minute près : **G_1 = 69° 51' W**

<u>Double chronometer method</u> :

La méthode a été explicitée, dans son principe, aux pages 15 et 16 de la présente fiche. Dans le présent ouvrage, A. C. Johnson propose d'utiliser le coefficient Pagel pour calculer les coordonnées du point. La procédure de calcul est énoncée avec précision et on en donne ci-après la traduction d'Octave de Jassaud ; les symboles ont été mis en conformité avec ceux employés dans cette fiche.

RÈGLE

1.- Prendre deux hauteurs à un intervalle de une heure et demie à deux heures (*pourvu que l'azimut de l'astre observé ait au moins varié d'un quart et demi ou mieux de deux quarts*). Calculer la première hauteur au moyen de la latitude estimée au moment de l'observation et appeler le résultat longitude G_1.

2.- Corriger la latitude estimée et la longitude G_1 du chemin parcouru dans l'intervalle compris entre les deux observations[11] et calculer la 2e hauteur avec cette latitude corrigée. Appeler la longitude ainsi obtenue longitude G_2 et la latitude corrigée latitude ϕ'_1.

3.- Prendre dans les tables l'azimut du Soleil au moment de chaque observation.

4.- Entrer dans la table II avec les latitudes et les azimuts correspondants ; y prendre les nombres p_1 et p_2 que l'on trouve en faisant cadrer. Faire ensuite la différence entre les nombres p_1 et p_2, si les azimuts se trouvent dans le même quadrant ou dans des quadrants opposés, et la somme s'ils se trouvent dans des quadrants adjacents. La différence entre les longitudes G_2 et G'_1, divisée par la différence ou par la somme des nombres p_1 et p_2, sera la correction que nous devrons appliquer à la seconde latitude (ϕ'_1), pour avoir la latitude exacte au moment de la seconde observation. Cette même correction de la latitude, multipliée par p_1 donnera la correction pour la longitude G'_1, et multipliée par p_2 donnera la correction pour la longitude G_2.

Comment porter la correction pour les deux longitudes :

5.- Si les observations sont faites dans le même quadrant ou dans des quadrants opposés du compas : les corrections se portent *toutes les deux à l'Est, ou toutes les deux à l'Ouest*. Si les observations sont faites dans des quadrants adjacents du compas : la correction pour la longitude la plus *Est* se portera à l'*Ouest*, et elle se portera à l'*Est* pour la longitude la plus *Ouest*. De telle façon que les deux longitudes, une fois corrigées, concordent entre elles. Si elles ne concordent pas, cela prouve que les corrections ont été mal portées ; c'est là un moyen infaillible de reconnaître une erreur, moyen propre à cette méthode seulement.

6.- Trouver le nom de la correction de la latitude, au moyen de chaque correction et du relèvement correspondant, comme nous l'avons indiqué dans la méthode précédente …

Pour une observation donnée, la méthode en question stipule d'écrire les initiales du quadrant dans lequel on a fait l'observation de l'astre, par exemple SE et, au-dessous, les initiales du quadrant opposé, NW, donc :

$$\begin{array}{ccc} S & & E \\ & \swarrow & \\ N & & W \end{array}$$

On fait ensuite correspondre les lettres en diagonales indiquant qu'à une différence de longitude E correspond une différence de latitude N et, nécessairement, qu'à une différence de longitude W correspond une différence de latitude S.

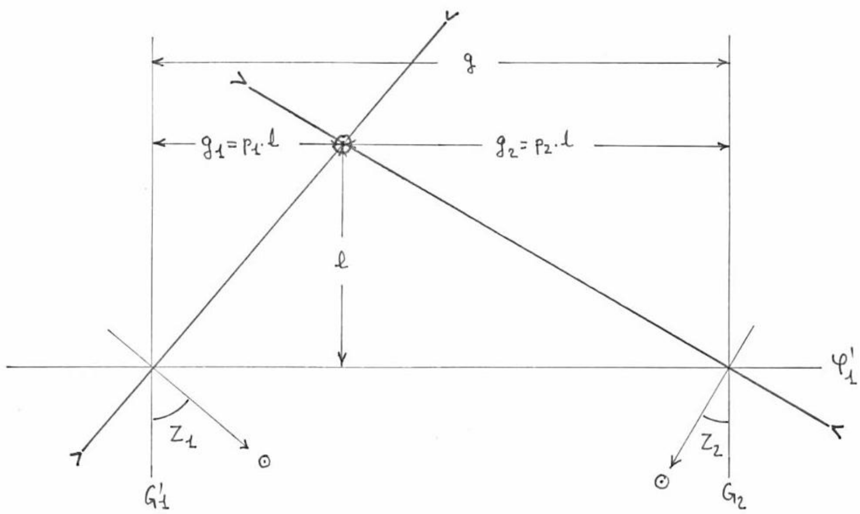
Si, par exemple, l'observation de l'astre est faite dans le quadrant SW, on aura :

$$\begin{array}{ccc} S & & W \\ & \swarrow & \\ N & & E \end{array}$$

[11] On obtient φ'_1 et G'_1.

La correspondance en diagonale indique qu'à une différence de longitude W correspond une différence de latitude N et, nécessairement, qu'à une différence de longitude E correspond une différence de latitude S.

Les éléments de justification des règles 5 et 6 ci-dessus se retrouvent à partir de la définition du coefficient Pagel et des formules et figures données en page 16 de la présente fiche. Une autre illustration en est donnée sur la figure ci-dessous caractéristique de deux observations prises dans les quadrants adjacents SE et SW.



Exemple :

A l'instant de la première observation, le Soleil a pour azimut Z_1 = S50°E ; le point déterminatif transporté à l'instant de la seconde observation a pour coordonnées : φ'_1 = 40° 15' N, G'_1 = 19° 06' E. A l'instant de la seconde observation, l'azimut de l'astre est Z_2 = S30°W et le calcul de longitude donne G_2 = 19° 26' E.

Les observations ont eu lieu dans deux quadrants adjacents ; on considérera donc la somme des coefficients Pagel. On a donc :

Z_1 =	S50°E	p_1 =	1,10	G_2 =	19° 26' E	p_1 =	1,10	p_2 =	2,27
Z_2 =	S30°W	p_2 =	2,27	G'_1 =	19° 06' E	$l = g/(p_1+p_2)$ =	5,9'	l =	5,9'
		$p_1 + p_2$ =	3,37	g =	20' E	$p_1.l = g_1$ =	6,49'	$p_2.l = g_2$ =	13,39'

Calcul des coordonnées du point observé :

On observe les indications des points 5 et 6 des règles ci-dessus. La différence de latitude l est égale à g_1/p_1 ou à g_2/p_2 ou encore à $g/(p_1+p_2)$, soit à 5,9'. Si on utilise la 1re observation, d'azimut SE avec g_1 qui est E, on obtient une détermination N pour l ; de même, si on utilise la seconde observation, d'azimut SW avec g_2 qui est W, on obtient une détermination N pour l.

Longitude la plus à l'W		Longitude la plus à l'E		Latitude	
G'_1 = g_1 =	19° 06,0' E 6,5' E	G_2 = g_2 =	19° 26,0' E 13,4' W	φ'_1 = l =	40° 15,0' N 5,9' N
G =	19° 12,5' E	G =	19°12,6' E	φ =	40° 20,9' N

On trouve la même valeur de longitude à 1/10’ près, ce qui est la preuve qu’il n’y a pas d’erreur de nom. On adoptera comme coordonnées du point : **φ = 40° 21’ N G = 19° 13’ E .**

La configuration des différents éléments de calcul du point est celle représentée sur la figure de la page précédente.

Calculs d’azimut :

Azimut par l’heure : on utilise alors les tables I et II ; les règles d’usage sont identiques à celles relatives aux tables anglaises ABC ou, en France, aux tables de E. Perrin. La table I est limitée aux angles horaires compris entre 1 h et 6 h. Si l’angle considéré est inférieur à 1 h, Johnson indique :

- de calculer l’azimut pour P = 1 h,
- d’admettre ensuite que la variation d’azimut est proportionnelle à la variation d’angle au pôle jusqu’à l’instant du passage au méridien.

Exemple : calcul de l’azimut pour φ = 32° N, D = 12° N et P = 9° E.

Pour P = 15°, on trouve, un azimut Z = S38°E ; on obtient pour 9° : Z = 38.9/15 = S23°E. Un calcul plus précis donne Z = S24,5°E. Le résultat est donc approché.

Si l’angle au pôle est supérieur à 6 h, il faudra utiliser son supplément et inverser la règle de nom du terme tanφ.cotP.

Azimut par la hauteur : à partir de la formule $\cos Z = \sec\varphi.\sec H.(\sin D - \sin\varphi.\sin H)$, A. C. Johnson obtient l’expression suivante (δ et N sont respectivement les distances polaire et zénithale) :

$$\cos Z = \sec H.(\cos\delta.\sec\varphi - \cos N.\tan\varphi)$$

Cette expression permet le calcul d’azimut en relevant dans les tables I et II les différentes valeurs naturelles des fonctions trigonométriques utilisées (cos, tan et sec) ; les produits peuvent ensuite être effectués à la main ou à l’aide des tables I et II qui peuvent être utilisées, avec un peu d’attention, en tables de multiplication.

A. C. Johnson donne une seconde possibilité de calcul avec une petite table spécifique à laquelle il faudra adjoindre une table de point. La formule de l’azimut par la hauteur est mise sous la forme :

$$C.\cos Z = A.\sin D - B\sin H$$

Expression dans laquelle A = 100.secφ, B = 100.tanφ et C = 100.cosH. La table spécifique donne A et B en fonction de la latitude et C en fonction de la hauteur.

Les produits A.sinD et B.sinH sont lus dans une table de point (A et B sont les distances et D et H les angles de route). La différence de ces deux quantités est le chemin NS à lire en vis-à-vis de la distance C dans une colonne à rechercher dont l’angle de route est l’azimut Z.

5. Commentaires :

D’une manière générale, les différents opuscules offrent, sous un faible encombrement, l’ensemble des tables nécessaires à la résolution des problèmes courants de navigation astronomique avec 4 décimales au maximum. Ils contrastent fortement avec les documents de calculs usuels de Raper, Rosser et Norie, pour ne citer que les plus courants à l’époque, qui comportent 800 à 1000 pages de textes et de tables associées, ces dernières comportant 5 ou 6 décimales.

Relativement simples d'emploi et conduisant à des résultats d'une précision suffisante à la mer, ces ouvrages ont rapidement été reconnus dans les marines militaire et marchande britanniques. On note que, le plus célèbre d'entre eux, « On Finding the Latitude & Longitude in Cloudy Weather » est réglementaire dans la Royal Navy ; dans la marine marchande, les méthodes développées par A. C. Johnson sont vivement recommandées par S. T. Lecky qui reprend notamment in-extenso dans ses « Wrinkles » la procédure de calcul de la « double chronometer method ».

Remarques sur la forme :

Une excellente typographie caractérise les ouvrages consultés. On note cependant que, dans chaque opuscule, A. C. Johnson a cherché à mettre un maximum d'éléments sous une forme aussi réduite que possible : certaines tables sont donc assez délicates à lire d'où un risque d'erreur.

On remarque également une distribution des instructions d'emploi parfois confuse dont l'origine est probablement à rechercher dans la succession d'ajouts et de modifications au fil des rééditions sans qu'il n'ait été procédé à une remise à jour d'ensemble.

Remarques sur le fond :

A. C. Johnson admet des angles entre lieux de position trop faibles (20° environ) et n'insiste peut-être pas assez sur le point par deux hauteurs traitées par deux méthodes différentes « chronometer altitude » et « ex-meridian » (sans pour autant qu'il ne s'agisse d'une circumméridienne) par exemple. On remarque également que la méthode Marcq de Saint-Hilaire est totalement ignorée.

On peut s'interroger sur la formulation adoptée dans « On Finding the Latitude & Longitude in Cloudy Weather », en haversine, plus compliquée que celle en versine utilisée dans les 3 autres opuscules. Il en est de même pour l'utilisation d'un point auxiliaire et de l'emploi de hauteur vraie « ronde », développée dans « How to Find the Time at Sea in less than a Minute », pourtant bien commode, qui aurait pu être exploitée dans la « double chronometer method ».

On note enfin que Johnson ne limite pas les observations à celles du Soleil et qu'il encourage les mesures de hauteurs d'étoiles à l'aube et au crépuscule.