CALCUL DU POINT

À UN INSTANT QUELCONQUE

MÉTHODES DÉVELOPPÉES EN GRANDE-BRETAGNE

La présente fiche est consacrée à l'étude des méthodes de calcul développées par des auteurs britanniques entre les années 1870 et 1920. Ces méthodes permettent le calcul des coordonnées géographiques du point astronomique résultant de deux mesures de hauteur prises en dehors du plan du méridien.

ROSSER'S ARRANGEMENTS

En 1863, William Henry Rosser, Principal of Norie's Nautical Academy[1], publie un manuel de navigation à l'attention des candidats aux examens de la marine marchande britannique : « A Self Instructor in Navigation and Nautical Astronomy ». L'ouvrage fut réédité à de nombreuses reprises[2] et décrit notamment une méthode de calcul du point astronomique basée sur la construction de Thomas Sumner ; cette méthode parait être la seule reconnue par le « Board of Trade » pour calculer le point par deux observations astronomiques prises à des instants quelconques. Elle est toujours réglementaire[3] dans les années 1920.

Rappelons que la droite de Sumner se construit à partir de deux points situés sur le cercle de hauteur relatif à l'observation faite dont on se fixe les latitudes et dont on calcule les longitudes. Le report de ces deux points sur la carte définit une droite qui est une corde sous-tendant la courbe de hauteur. Si les deux points de calcul ne sont pas trop éloignés l'un de l'autre et si la hauteur n'est pas trop importante ($< 80°$), cette droite peut être assimilée au lieu de position du navire sur la carte.

Connaissant la position estimée au moment des observations, on adopte en général comme latitudes de calcul des valeurs entières de degrés ou de demi-degrés encadrant la latitude estimée.

Le calcul d'angle au pôle s'effectue par la formule de Borda que les britanniques mettent plutôt sous la forme :

$$\mathrm{hav(P)} = \left(\sin\frac{\mathrm{P}}{2}\right)^2 = \sec\varphi . \csc\delta . \cos \mathrm{s} . \sin(\mathrm{s} - \mathrm{H})$$

expression dans laquelle P est l'angle au pôle cherché, φ la latitude arbitraire fixée, δ la distance polaire de l'astre et H la hauteur vraie issue de la mesure ; s est telle que $2s = \delta + \varphi + H$.

L'angle au pôle P ayant été calculé, on détermine ensuite l'angle horaire local AHag = P si l'astre est à l'W ou AHag = 360° - P si l'astre est à l'E. La connaissance de l'heure de l'observation, donnée par le chronomètre, permet de trouver, à l'aide d'un almanach, l'angle horaire de l'astre au méridien origine AHap. La longitude cherchée est enfin donnée par : G = AHap – AHag.

---

[1] Il fut également à une époque éditeur de l'ouvrage de J. W. Norie « A Complete Epitome of Practical Navigation and Nautical Astronomy ».
[2] L'édition révisée de 1891 a été utilisée pour rédiger la présente fiche.
[3] Voir par exemple « Nicholl's Concise Guide to BoT Examinations », 20e édition 1922.

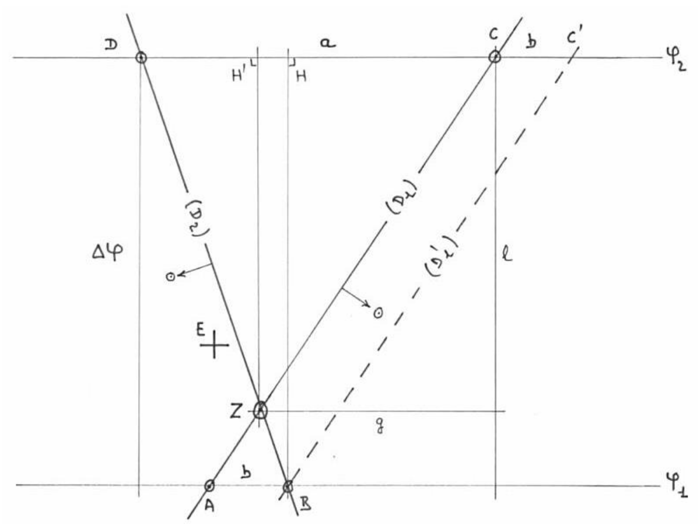
La recherche du point résultant de deux observations nécessite donc au total quatre calculs de longitude. Si on dispose d'une carte marine, ou d'un canevas de Mercator, le report des quatre points permet de tracer les deux droites puis de lire les coordonnées de leur point d'intersection qui représente la position du navire à l'instant de la seconde observation si l'on a pris soin de réduire la première observation à l'heure de la seconde[4]. D'une manière générale, il n'était pas d'usage, à l'époque considérée, de travailler graphiquement et le calcul des coordonnées du point était une quasi-obligation. Dans ses « Wrinckles in Practical Navigation », S. T. Lecky indique que, pour bénéficier de la pleine précision dont la méthode est porteuse, il est préférable de traiter tout le problème par le calcul du début à la fin, le calcul étant bien supérieur à toutes constructions graphiques[5].

Supposons que l'on ait observé le Soleil une première fois dans la matinée puis, une seconde fois, dans le courant de l'après-midi. Après avoir porté le point estimé E et réduit la première observation à l'heure de la seconde, on fixe les deux latitudes de calcul rondes φ_1 et φ_2 encadrant la latitude estimée φ_e et on effectue les calculs de longitudes ; on obtient ainsi les 4 points A, B, C et D de construction des deux droites :

1re observation, droite (D_1)	A : φ_1, G_A	C : φ_2, G_C
2e observation, droite (D_2)	B : φ_1, G_B	D : φ_2, G_D

Le point observé Z est situé à l'intersection des deux droites.

La figure ci-dessous représente le canevas de Mercator sur lequel on a reporté les différents éléments de calcul des coordonnées du point qui s'effectue en utilisant des rapports de similitudes (ou des proportions) entre différents triangles.



On note : $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ (= 60' ou 30' en général), $G_D - G_C = a$, $G_A - G_B = b$, $G_A - G_C = c$, l et g les différences de latitude et de longitude du point cherché Z par rapport au point C. A partir du point B, on trace la droite (D'_1), parallèle à (D_1) coupant le parallèle de latitude φ_2 en C' ; on note la similitude des triangles DZC et DBC' et on a donc :

$$\frac{HB}{H'Z} = \frac{DC'}{DC} \text{ soit } H'Z = \frac{HB.\,DC}{DC'} \text{ ou } l = \frac{\Delta\varphi.\,a}{a+b}$$

[4] Il peut s'agir d'un transport sur la carte ou du calcul d'une hauteur réduite à l'instant de la 2e observation ; voir la fiche relative aux Calculs de Latitude, page 1.
[5] 16e édition, 1912, page 504.

D'où l'on déduit la latitude du point Z : $\varphi = \varphi_2 + l$ (algébriquement)

A partir de la similitude de ces mêmes triangles, on peut ensuite écrire :

$$\frac{C'H}{CH'} = \frac{DC'}{DC} \text{ soit } CH' = \frac{DC.\,C'H}{DC'} \text{ ou } g = \frac{a.\,c}{a+b}$$

D'où la longitude du point Z : $G = G_C + g$ (algébriquement)

Nous avons raisonné ici à partir d'un cas de figure particulier. D'autres configurations sont possibles : le point d'intersection des droites (D_1) et (D_2) peut être à l'extérieur de la bande limitée par les parallèles de latitude φ_1 et φ_2 ou encore les droites peuvent correspondre à des observations faites dans un même quadrant (il pourra s'agir alors de deux observations du Soleil faites dans la matinée ou dans l'après-midi). Il est donc intéressant d'appliquer une règle de calcul générale, valable dans tous les cas de figure.

Utilisant toujours des valeurs absolues, W. H. Rosser énonce ainsi la procédure de calcul générale[6] :

1) Pour la latitude la plus faible, calculer la différence des longitudes des points A et B et pour la latitude la plus grande, calculer la différence des longitudes des points C et D.
2) Noter a la plus grande différence de longitude et b la plus petite.
3) Les différences de longitude seront notées E ou W si la longitude de B est respectivement à l'E ou à l'W de celle A et si la longitude de D est respectivement à l'E ou à l'W de celle de C.
4) Si les différences de longitudes sont de même nom, on considèrera leur différence (a – b) ; si elles sont de noms contraires, on considèrera leur somme (a + b).
5) Calculer la différence de latitude en utilisant les rapports de proportions $l = \Delta\varphi.\,a/a \pm b$; le calcul s'effectue par logarithmes. Cette différence de latitude est relative à la latitude de calcul donnant la plus grande différence de longitude ; elle est N si la latitude de calcul donnant la plus petite différence de longitude est au N de celle donnant la plus grande différence de longitude ; elle est S dans le cas inverse.
6) Calculer la différence de longitude entre A et C que l'on note c.
7) Calculer la différence de longitude g en utilisant les rapports de proportions $g = a.\,c/a \pm b$; le calcul s'effectue de même par logarithmes. Cette différence de longitude est relative au point A ou au point C à partir duquel est relevée la plus grande différence de longitude a ; elle est E ou W suivant que les longitudes de C ou de A sur le parallèle de plus petite différence de longitude (b), est à l'E ou à l' W de celle se trouvant sur le parallèle de plus grande différence de longitude (a).

S. T. Lecky emploie l'expression de « Rosser's arrangements » pour qualifier cette procédure de calcul et sa présentation.

<u>Exemple</u> :

La 1re observation du Soleil est prise dans la matinée (astre à l'E) et la seconde dans l'après-midi (Soleil à l'W) ; la première hauteur est réduite à l'heure de la seconde. Les données de calcul sont résumées dans le tableau suivant :

[6] Les sept points de calcul suivants constituent une adaptation du texte de Rosser figurant aux pages 318 et 319 de l'édition de 1891 de son ouvrage « Self Instructor in Navigation and Nautical Astronomy ». Il est à remarquer qu'un simple schéma respectant la configuration des droites permet de fixer sans ambiguïté les noms des différences de latitude et de longitudes.

$\varphi_e = 49° 20' N$			$G_e = 7° 15' W$		
1re observation					
$H_{v1} =$	49° 08,0’	$D_1 =$	19° 52,0’ N	$AHvp_1 =$	331° 21,3’
2e observation					
$H_{v2} =$	40° 57,0’	$D_2 =$	19° 55,0’ N	$AHvp_2 =$	56° 46,1’

Compte tenu de la latitude estimée φ_e, on adopte comme latitudes de calcul $\varphi_1 = 49°$ N et $\varphi_2 = 50°$ N. Les calculs de longitudes sont résumés dans le tableau ci-après :

	$\varphi_1 = 49°$ N		$\varphi_2 = 50°$ N	
1re obs.	$AHvp_1 =$ $AHvg_{A1} =$	331° 21,3’ 324° 05,5’	$AHvp_1 =$ $AHvg_{C1} =$	331° 21,3’ 325° 07,0’
	$G_A =$	W 7° 15,8’	$G_C =$	W 6° 14,3’
2e obs	$AHvp_2 =$ $AHvg_{B2} =$	56° 46,1’ 49° 46,7’	$AHvp_2 =$ $AHvg_{D2} =$	56° 46,1’ 49° 15,3’
	$G_B =$	W 6° 59,4’	$G_D =$	W 7° 30,8’

On applique ensuite la procédure donnée par Rosser pour calculer les coordonnées du point :

	Latitude la plus faible φ_1		Latitude la plus forte φ_2			
1re obs 2e obs	$G_A =$ $G_B =$	7° 15,8’ W 6° 59,4’ W	$G_C =$ $G_D =$	6° 14,3’ W 7° 30,8’ W	$G_C =$ $G_A =$	6° 14,3’ W 7° 15,8’ W
Diff.	b =	16,4’ E	a =	1° 16,5’ W	c =	1° 01,5’ W
	Plus faible différence		Plus grande différence			

Compte tenu de la règle énoncé par Rosser, les différences de latitude l et de longitude g ont pour origine le point C ; d’autre part, a et b étant de noms contraires, on considèrera la somme a + b.

On a donc : $l = \Delta\varphi.a/(a + b) = 49{,}4'$ S et $g = a.c/(a + b) = 50{,}6'$ W.

Les coordonnées du point observé sont donc : $\varphi = \varphi_2 - 49{,}4' = 49° 10{,}6'$ N et $G = G_C + 50{,}6' = 7° 04{,}9'$ W.

La configuration des droites est celle indiquée sur la figure de la page 2.

Commentaires :

La procédure de calcul est complexe : quatre calculs de longitude et une détermination finale des coordonnées du point inextricable à moins de faire une figure permettant de retrouver la configuration du problème et de fixer aisément les origines et sens convenables aux variations de latitude et longitude conduisant aux coordonnées du point observé. La procédure indiquée par Rosser est néanmoins adaptée aux candidats aux examens de la marine marchande britannique, peu familiarisés avec les opérations algébriques. Dans ses « Wrinckles », S. T. Lecky reconnait cependant que la méthode, exécutée dans son ensemble, est « a formidable affair » et que la complexité des règles à appliquer au final est à faire fuir tout officier au long cours[7].

Pour obtenir un point précis, les droites doivent se couper sous un angle suffisant, 30° au moins. Les calculs étant conduits selon la méthode du parallèle estimé (ou de Lalande), il est aussi nécessaire que les droites coupent les parallèles selon un angle suffisant, également d'au moins 30°. La méthode étant basée sur des calculs de longitudes (ou d'heures), elle a reçu, en Grande-Bretagne, le nom de « double chronometer altitude ».

Nota : pour le calcul final des coordonnées du point, W. H. Rosser emploie des « Proportionnal Logarithms » définis ainsi :

$$\text{prop } \log x = \log 10800 - \log x$$

x étant exprimé en secondes d'heure ou d'arc. La table figurant dans son ouvrage est directement argumentée en heures, minutes et secondes ou en degrés minutes et secondes. Le calcul de l et de g s'effectue de la même façon qu'avec des logarithmes décimaux présentés de façon usuelle.

[7] 16e édition, page 504.